Devoir à la maison à rendre pour le 7 novembre 2014

Facteur de Landé d'un spin 1/2 habillé par des photons de radiofréquence

On considère un spin 1/2 irradié par une onde radiofréquence (rf) de pulsation ω, dont le champ magnétique $\vec{B}_1$ est polarisé selon x. Ce champ rf est traité de manière *quantique* ; l'état du champ est supposé être un état cohérent $|\alpha\rangle$, avec un nombre moyen de photons $\langle N\rangle \gg 1$. On négligera la dispersion de N pour un tel état. Le but de cet exercice est de calculer à l'ordre le plus bas l'effet d'un champ magnétique *statique* $\vec{B}_0$, dirigé selon z, sur le spin 1/2 *habillé par les photons rf*, et de comparer les résultats théoriques et expérimentaux.

A. Hamiltonien du système

Le hamiltonien du système s'écrit sous la forme $H = H_R + H_{\mathrm{rf}} + H_z$, avec

- $H_z = \omega_0 S_z$ le hamiltonien Zeeman du spin (on note $\omega_0 = -\gamma B_0$, σ_z est la matrice de Pauli, γ le rapport gyromagnétique du spin 1/2 et $S_z = \hbar\sigma_z/2$)
- et le hamiltonien de couplage entre le spin et le champ B_1, noté $H_{\mathrm{rf}} = \lambda S_x(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)/\hbar$, où λ est une constante égale à $\hbar\omega_1/(2\sqrt{\langle N\rangle})$, avec $\omega_1 = -\gamma B_1$ la fréquence de Rabi du champ rf.
- le hamiltonien du champ rf libre $H_R = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ ($\hat{a}$ est l'opérateur d'annihilation d'un photon rf). ω est varié autour de valeurs proches de ω_1.

a. Dans l'expérience considérée, B_1 est de l'ordre du milligauss (soit $B_1 \sim 10^{-7}$ T) et la fréquence rf de l'ordre du kHz. En admettant que le champ est produit dans un volume limité, de l'ordre du m^3, quel est l'ordre de grandeur du nombre de photons rf dans le champ ? L'approximation $\langle N\rangle \gg 1$ est-elle justifiée ?

B. Diagonalisation de $H_0 = H_R + H_{\mathrm{rf}}$

On s'intéresse ici au cas $B_0 = 0$

a. Calculer $[H_R + H_{\mathrm{rf}}, S_x]$.

b. En déduire que pour diagonaliser H_0, il suffit de diagonaliser sa restriction H_ε à chacun des deux sous-espaces propres de S_x. On notera $|\varepsilon_x\rangle$ les états propres de S_x (et $\varepsilon\hbar/2$ leurs valeurs propres), avec $\varepsilon = \pm 1$. Dans ce sous-espace, H_ε s'écrit :

$$H_\varepsilon = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)$$

c. **Lemme : opérateur déplacement.**
On considère $\mathcal{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger + \beta\right)(\hat{a} + \beta)$, avec β réel. On s'intéresse à l'évolution de $|\tilde{\psi}\rangle = \hat{T}(\beta)|\psi\rangle$, où l'*opérateur déplacement* $\hat{T}(\beta) = \exp\left[\beta\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\right]$ est une transformation unitaire.
(i) Montrer que si $\mathcal{H}$ gouverne l'évolution de $|\psi\rangle$, alors $\tilde{\mathcal{H}} = \hat{T}\mathcal{H}\hat{T}^\dagger$ rend compte de l'évolution de $|\tilde{\psi}\rangle$
(ii) Montrer que $\tilde{\mathcal{H}}$ s'écrit $\tilde{\mathcal{H}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ (on pourra commencer par calculer le commutateur $[\hat{a}, \hat{T}(\beta)]$ et utiliser le formulaire à la fin de l'énoncé).

d. Déduire du lemme précédent que les états propres de H_ε sont de la forme

$$|\widetilde{\varepsilon_x, N}\rangle = \exp\left[\frac{\varepsilon\lambda(\hat{a}^\dagger - \hat{a})}{2\hbar\omega}\right]|\varepsilon_x, N\rangle$$

e. Quelles sont les valeurs propres de H_0, et leur dégénérescence ? Tracer un diagramme d'énergie.

C. Interaction avec $\vec{B}_0$: facteur de Landé

a. On s'intéresse maintenant à l'action de H_0, au premier ordre de la théorie des perturbations. Montrer que H_z ne couple que les états $\widetilde{|+_x, N\rangle}$ et $\widetilde{|-_x, N\rangle}$. Que vaut l'élément de matrice correspondant ?
On rappelle que

$$|+_x\rangle = \frac{|+_z\rangle + |-_z\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |-_x\rangle = \frac{|+_z\rangle - |-_z\rangle}{\sqrt{2}}$$

b. La levée de dégénérescence entre $\widetilde{|+_x, N\rangle}$ et $\widetilde{|-_x, N\rangle}$ vaut précisément $(\tilde{g}/g)\hbar\omega_0$, où $\tilde{g}$ est le facteur de Landé du spin habillé et g celui du spin nu. Montrer que

$$\frac{\tilde{g}}{g} = \langle N| \exp[-\lambda(\hat{a}^\dagger - \hat{a})/\hbar\omega]|N\rangle.$$

c. À la limite $\langle N\rangle \gg 1$, justifier que l'on peut écrire $\hat{a}^p|N\rangle \simeq \left(\sqrt{\langle N\rangle}\right)^p |N-p\rangle$ pour $p \leq \sqrt{\langle N\rangle} \ll \langle N\rangle$. En déduire que le facteur de Landé du spin 1/2 devient

$$\tilde{g} = gJ_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right),$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0. Pour ce faire, on développera l'opérateur T avec la formule de Glauber.

D. Résultats expérimentaux

a. Le tableau ci-dessous donne le facteur de Landé $\tilde{g}$ (rapporté à sa valeur “nue” g) d'atomes de rubidium dans l'état hyperfin fondamental, mesuré * pour diverses valeurs de ω_1 obtenues en faisant varier l'amplitude du champ rf (de fréquence $\omega/(2\pi) = 2700$ Hz).

$\omega_1/(2\pi)$ (kHz)	$\tilde{g}/g$
0.0	1.00
2.5	0.80
4.9	0.37
6.5	0.00
9.0	-0.40
13.5	-0.25
16.0	0.05
19.0	0.25
23.5	0.00
27.0	-0.18

Ces résultats sont-ils en accord avec la prédiction théorique ?

b. Quel peut être l'intérêt de diminuer, voire d'annuler, le facteur de Landé d'un atome ?

∗. S. Haroche *et al.*, Phys. Rev. Lett. **24**, 861 (1970).

Formulaire

On rappelle :

a) la formule dite de Glauber

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp(-[\hat{A},\hat{B}]/2)\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}),$$

valable si les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutent avec leur commutateur ;

b) $[a, f(a, a^\dagger)] = \dfrac{\partial f}{\partial a^\dagger}$

c) le développement en série entière de J_0, fonction de Bessel d'ordre 0 :

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p},$$

qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) l'allure de la fonction de Bessel $J_0(x)$ pour $0 \leq x \leq 15$, indiquée sur la figure ci-après.