



Clément Sire



***Laboratoire de Physique Théorique
CNRS & Université Paul Sabatier, Toulouse
www.lpt.ups-tlse.fr***

Introduction

- La notion de **hasard** (*al-zahr*: dés, chance) exprime une incapacité à **prévoir avec certitude** ce qu'il va advenir : l'issue d'un « événement » ou d'une « expérience » (exemple : un tirage de dés)
- Dans son sens commun, le hasard couvre :
 - L'opposition avec le **déterminisme**
 - Une absence apparente de **causalité**
 - L'**ignorance** ou la méconnaissance des paramètres et mécanismes sous-jacents
- ***Le « vrai hasard » existe-t-il ?***

Ce qu'en pensent de grands hommes

- « Ce que nous appelons hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu », [Voltaire](#) (et d'autres...)
- « Il n'y a pas de hasard dans l'art non plus qu'en mécanique », [Charles Baudelaire](#)
- « Le hasard, c'est le déguisement que prend Dieu pour voyager incognito », [Albert Einstein](#) (et d'autres...)
- « Le hasard, c'est le purgatoire de la causalité », [Jean Baudrillard](#)
- « Le hasard est le maître de l'humour », [Max Ernst](#)

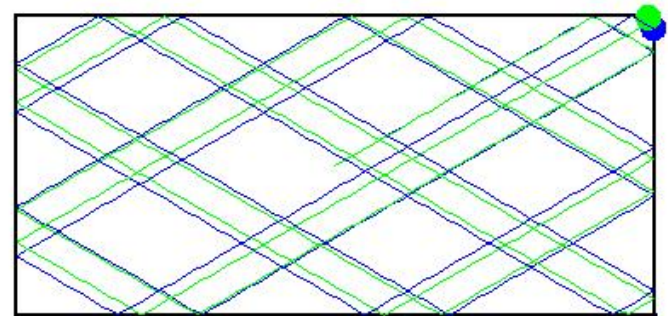
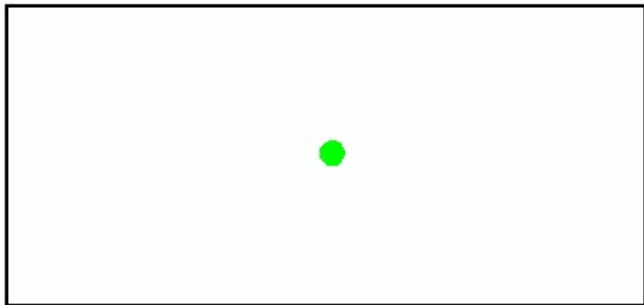
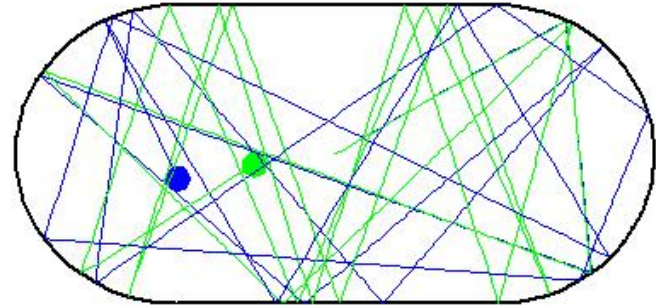
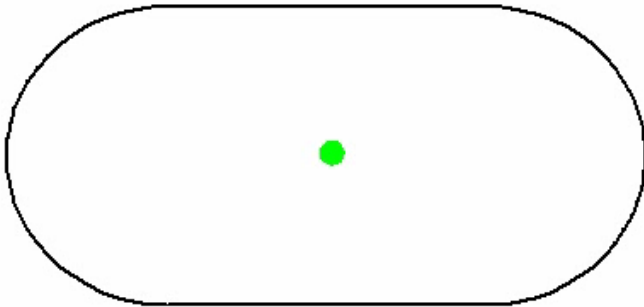
Le chaos

- Les équations de la mécanique « classique » de Newton sont **déterministes** : la connaissance *parfaite* des **conditions initiales** d'un système implique la connaissance *parfaite* de son **évolution future**
- Un système **chaotique** est un système extrêmement **sensible à ses conditions initiales** : une différence (ou méconnaissance) infime de celles-ci conduit rapidement à des **évolutions très différentes**

Le chaos

➤ Exemples de systèmes chaotiques :

- Un lancer de dés
- Le mouvement des molécules d'un gaz
- La météo
- Un billard non « intégrable » (pas un cercle ou un polygone)
- ...



Le hasard dans la vie quotidienne

- En pratique, nous sommes entourés (et sommes constitués !) d'assez de systèmes chaotiques pour que la vie nous semble jalonnée d'une **succession de hasards**
- Les lois de la physique quantique (nécessaire pour décrire l'échelle atomique) sont **déterministes mais intrinsèquement probabilistes** : elles prédisent (avec certitude) la probabilité de tel ou tel événement

Le monde est intrinsèquement aléatoire !

Le monde est-il imprédictible ???

- L'approche de la **physique statistique** (Boltzmann, Gibbs, Maxwell...) a justifié que, dans certaines conditions, **un grand système chaotique se comporte de façon « régulière »... et donc prédictible...**
Et cela, grâce au chaos !!!

➤ **Exemples :**

- La physique des gaz et liquides macroscopiquement « non turbulents »
- Électrons dans les matériaux
- ...

Les probabilités

- Les différents résultats possibles d'un « événement aléatoire » (soumis au hasard) peuvent chacun avoir une certaine **probabilité intrinsèque**
- **Exemples :**
 - Un dé (non pipé !) a une probabilité $1/6$ (1 chance sur 6) de tomber sur chacune de ses 6 faces
 - La probabilité de gagner le gros lot au Loto (6 numéros) est de 1 chance sur 13 983 816
 - La probabilité de recevoir une main de 13 cartes, toutes de la même couleur, est $1/158\,753\,389\,900$

Les probabilités

- **Les probabilités** des différents résultats d'une « expérience » peuvent être **mesurées**, si on peut **répéter** cette expérience :

$$p_{\text{résultat}} \approx \frac{\# \text{ d'expériences avec le résultat}}{\# \text{ total d'expériences}} = \text{fréquence du résultat}$$

➤ Exemples :

- La probabilité que le dé tombe sur le 1 peut être évaluée par la **fréquence** de cet événement sur N tirages :

$$p_1 = \frac{1}{6} \approx \frac{N_1}{N} \pm \text{erreur d'ordre } \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- Une personne tirée au hasard dans la population française a une probabilité 0,516 (un **pourcentage de chance** de 51,6%) d'être une femme
- Quelle est la probabilité que le PSG batte le Barca ???
(30%, estiment les parieurs et les bookmakers ; mais invérifiable)

Maniement des probabilités

- La probabilité d'un événement composé de plusieurs événements « **indépendants** » (décorrélés) est le **produit** de leur probabilité

- **Exemples :**

- La probabilité qu'un tirage de deux dés donne « double 4 » est



$$P_{d_1=4 \text{ et } d_2=4} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,0277... \approx 2,8\%$$

- La probabilité qu'une personne soit une femme (0,516 ou 51,6%) **ET** gagne plus de 2500€ net/mois (0,20 ou 20%) **n'est pas** $0,516 \times 0,20 \approx 0,103$ (10,3%)... mais **7.7%** (contre 12,3% pour homme + salaire > 2500€) !!!

Maniement des probabilités

➤ La probabilité pour qu'un événement parmi plusieurs événements « **exclusifs** » arrive est la **somme** des probabilités de ces événements

➤ Exemples :

➤ La probabilité qu'un humain soit une femme **OU** un homme est $0,516 + 0,484 = 1$ (ouf !)

➤ La probabilité que la somme des faces de deux dés soit égale à 9 est

$$\begin{aligned} P_{d_1+d_2=9} &= P_{d_1=6 \text{ et } d_2=3} + P_{d_1=5 \text{ et } d_2=4} + P_{d_1=4 \text{ et } d_2=5} + P_{d_1=3 \text{ et } d_2=6} \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{9} \approx 0,111... = 11,1\% \end{aligned}$$



Un Peu d'Histoire

- Girolamo Cardano (1501-1576)
- Pierre de Fermat (~1605-1665)
- Blaise Pascal (1623-1662)
- Christianus Huygens (1629-1695)
- Pierre-Simon Laplace (1749-1827)
- Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987)



Les anniversaires

- Dans une classe (ou un groupe quelconque) de **23** personnes, qu'elle est **la probabilité p_{23} qu'au moins deux individus aient le même anniversaire ?**

A votre avis : $\frac{23}{365} \approx 6\%$, $\frac{23 \times 22}{2 \times 365} = 69\%$, $< 50\%$, $> 50\%$?

- **Réponse :** calculons la probabilité **contraire** $1-p_n$ pour que toutes les n personnes aient un anniversaire différent :

$$1 - p_n = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{365 - (n - 2)}{365} \times \frac{365 - (n - 1)}{365}$$

$$p_n = 1 - \frac{365!}{(n - 365)! 365^n}, \quad \text{avec } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n$$

$$p_{23} = 50,7\%, \quad p_{30} = 70,6\%, \quad p_{40} = 89,1\%, \quad p_{50} = 97,0\%, \quad p_{60} = 99,4\%$$

Let's make a deal : problème de Monty Hall

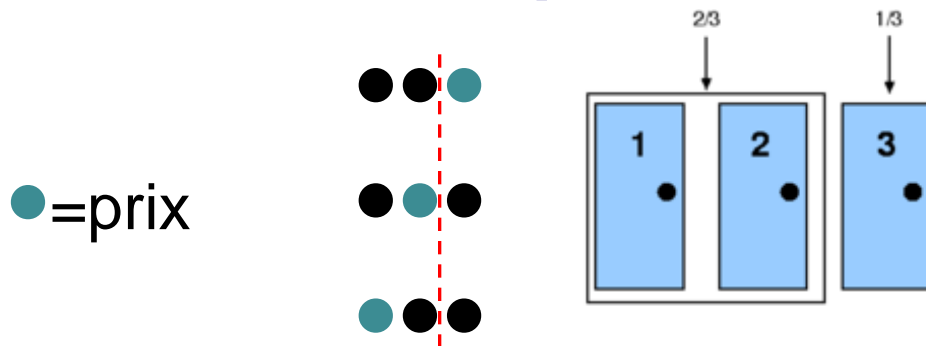
- Dans un jeu télévisé, un **prix extraordinaire** est caché derrière **une porte parmi trois**
- Le candidat choisit une porte (ici, la 3), puis le **présentateur ouvre l'une des deux autres portes** (ici, la 1) qui ne contient pas le prix



- La présentateur propose alors au joueur de **changer de porte** (ici, la 2). **Doit-il le faire ???**
A votre avis : oui, non, c'est pareil ?

Let's make a deal : problème de Monty Hall

- Initialement, le joueur avait 1 chance sur 3 de trouver la bonne porte
- Il y a donc une probabilité $2/3$ pour que le prix soit derrière [la porte 1 **OU** la porte 2]



- Après ouverture de la porte 1, la porte 2 a donc une **probabilité $2/3$** de cacher le prix : il faut donc **changer et choisir la porte n°2...**
à 2 (tiers) contre 1 (tiers) !!!

Let's make a deal : autres formulations

➤ Trouvons les deux chèvres !

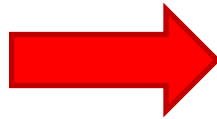
- Initialement, le joueur avait 2 chances sur 3 d'avoir sélectionné une porte qui cache une chèvre
- Lorsque le présentateur ouvre la porte, la probabilité que la porte 1 **ET** la porte 2 abritent les deux chèvres est $2/3 = 1 \times p_2 = p_2$

➤ Principe du moindre choix (Borel au bridge) :

- Si le joueur a raison de choisir la porte 3, le présentateur a **2 choix** pour **la porte à ouvrir**, contre **1 seul choix**, si le prix est derrière la porte 2
- Ramenons nous aux cas où une chèvre est derrière la porte 1

$$\bullet \bullet \bullet p_3 = 1/2$$

$$\bullet \bullet \bullet p_2 = 1/2$$



$$\bullet \bullet \bullet p_{3,1} = 1/2 \times 1/2 = 1/4$$

$$\bullet \bullet \bullet p_{3,2} = 1/2 \times 1/2 = 1/4$$

$$\bullet \bullet \bullet p_{2,1} = 1/2 \times 1 = 1/2 = 2 \times p_{3,1}$$

Expérience de Buffon (1733)

Mesurer π avec les probabilités !

- Prendre un grand nombre d'aiguilles N et mesurer leur **longueur a**
- Lâcher ces aiguilles sur votre parquet dont les lattes ont une largeur L ($>a$, sinon c'est plus compliqué)
- Compter le nombre n d'aiguilles qui sont à cheval entre 2 lattes du parquet
- La **probabilité d'intersection p** d'une aiguille peut se calculer simplement (voir appendice) et vaut

$$p = \frac{2a}{\pi L} \approx \frac{n}{N} \pm \text{erreur d'ordre } \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Expérience de Buffon (1733)

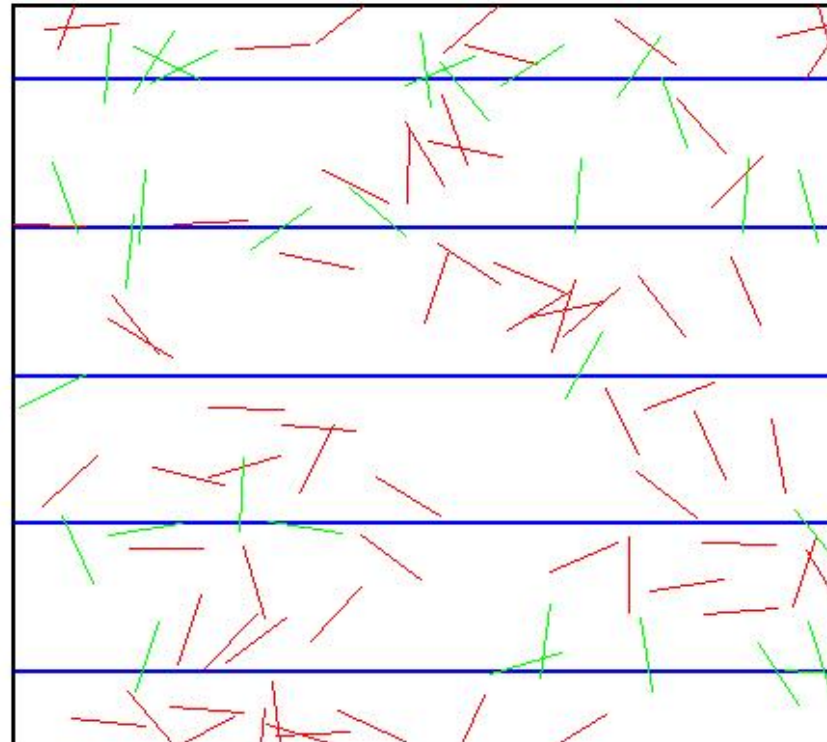
Mesurer π avec les probabilités !

➤ Faisons l'expérience, avec $a = 3$ cm et $L = 6$ cm \Rightarrow

$$p = \frac{2a}{\pi L} = \frac{1}{\pi} \approx \frac{n}{N}, \text{ et donc } \pi = 3.1415926\dots \approx \frac{N}{n} \pm O\left(\frac{4,6}{\sqrt{N}}\right)$$

$N=100$ $n=32$

$\pi \approx N/n = 3.1250 \pm 0.4597$

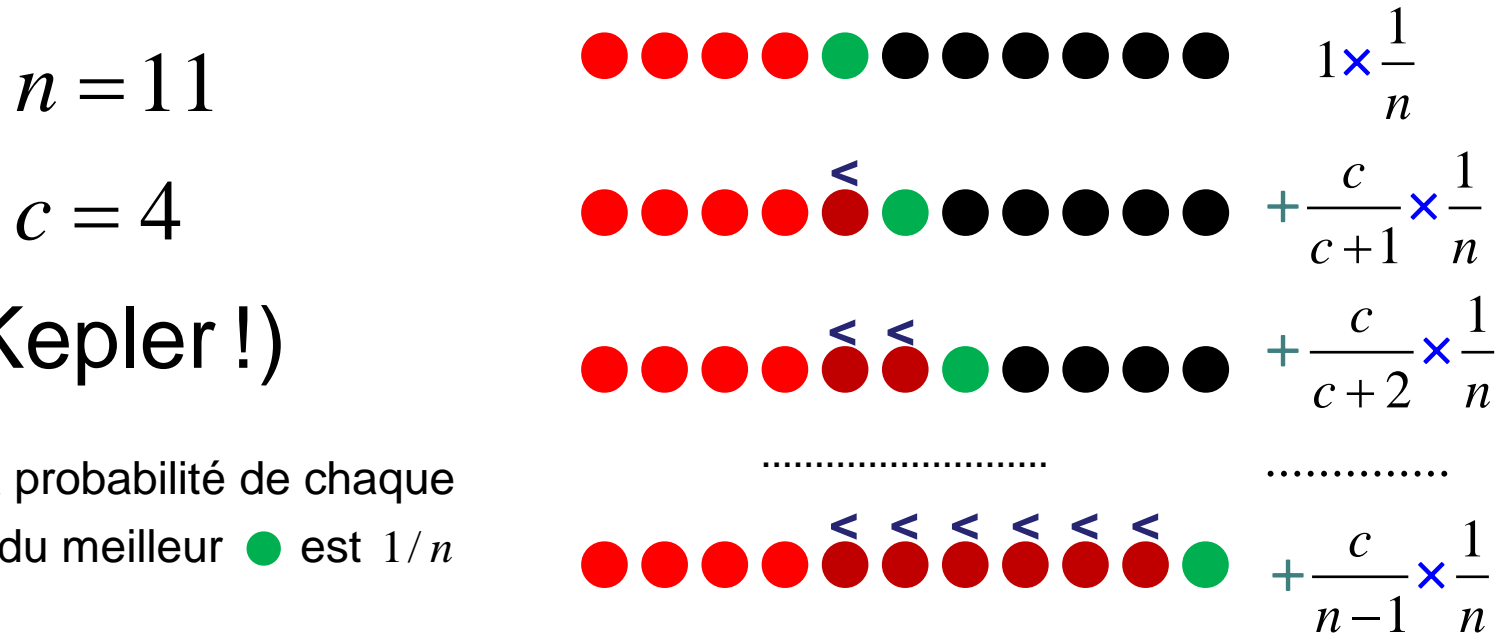


Le (second) mariage de Kepler (1613) ou le cabinet de recrutement ou la recherche d'une maison à acheter

- Vous devez choisir le **meilleur candidat** parmi n qui se présenteront successivement pour un entretien ($n=11$ pour les femmes de Kepler)
- Malheureusement, après chaque interview, vous devez **décider de garder ou non** le candidat
- Quelle **stratégie** adopter pour **maximiser la probabilité de choisir le *tout meilleur* candidat** ?
 - Si vous choisissez trop tôt, vous ratez l'occasion de trouver mieux
 - Si vous laissez passer trop de candidats, en espérant trouver mieux, il est fort probable que vous allez en fait rater le meilleur choix !

Le (second) mariage de Kepler (1613) ou le cabinet de recrutement

- **Stratégie proposée** : vous interviewez c candidats **sans intention de les garder**. Puis, vous prenez le **premier** candidat (s'il en reste un !) **meilleur** que ces c candidats
- Comment choisir c pour **maximiser** ainsi la probabilité $P(n, c)$ de sélectionner **le tout meilleur candidat** ?



N.B.: la probabilité de chaque position du meilleur ● est $1/n$

Le (second) mariage de Kepler (1613) ou le cabinet de recrutement

- **Stratégie proposée** : vous interviewez c candidats **sans intention de les garder**. Puis, vous prenez le **premier candidat meilleur** que tous ces c candidats
- La probabilité $P(n, c)$ de sélectionner **le tout meilleur candidat** est donc

$$P(n, c) = \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{c}{c+1} + \frac{c}{c+2} + \dots + \frac{c}{n-1} \right)$$

- $P(n, c)$ est maximum pour $c_{\max} = \left[\frac{n-1}{e} \right]$ ($e = 2,71828\dots$)

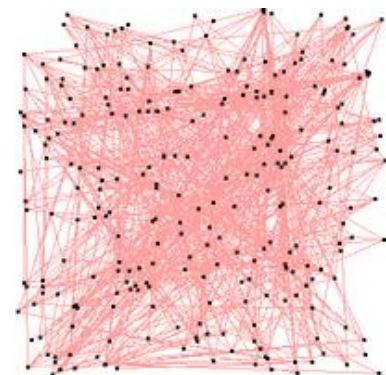
$$P_{\max} = P(n, c_{\max}) = \frac{1}{e} = 0,367879\dots \approx 36,8 \%$$

- **Kepler a bien jeté son dévolu sur son 5^{ième} choix !!!**

Conclusion en guise de réflexion

Les coïncidences vraiment significatives ?

- Dans nos vies, nous sommes sujets à des **coïncidences** parfois troublantes, auxquelles nous donnons parfois volontiers **un sens**
- **Coïncidence : conjonction d'événements (constatée *a posteriori*)**, fruit du « hasard » et sans causalité apparente, qui aurait « normalement » dû arriver avec une très « faible » probabilité
- **N.B. :** on ne remarque pas la multitude de coïncidences ***a priori*** possibles... **qui ne se produisent pas !**
- Des coïncidences connues
 - Géométriques
 - Gagner le gros lot du Loto (moi + gagner)
 - Éclipses solaires... avant que l'on ne comprenne



607 4-alignements
de 269 points

Conclusion en guise de réflexion

Les coïncidences vraiment significatives ?

- Quelle est la probabilité p (à la louche) pour qu'une fois au moins dans l'année, vous pensiez à l'une de vos 10 connaissances les plus importantes, et que celle-ci vous appelle moins d'une minute après ?

C = # de connaissances importantes

T = # moyen de coups de fil reçus par jour de celles-ci

P = # de fois par jour où vous pensez à l'une d'entre elles

$$p_{1 \text{ minute}} = \frac{T}{1000} \times \frac{P}{1000} \times \frac{1}{C} \quad (\sim 1000 \text{ minutes d'activité/jour})$$

$$p = 1 - (1 - p_{1 \text{ minute}})^{365 \times 1000}$$

$$T = 2, P = 3, C = 10 \Rightarrow p \approx 20\%$$

***Quelle coïncidence: c'est la fin !
Merci de votre attention***

Présentation téléchargeable (avec d'autres présentations de vulgarisation scientifique) sur [ma page](#), sur le site du [LPT Toulouse](#)



Probabilité d'intersection p d'une aiguille de longueur a avec de lattes de largeur $L > a$

- Toutes les positions différentes de l'aiguille mises bout à bout forment un polygone à N côtés. Plus N est grand, plus ce polygone se rapproche d'un cercle
- Le périmètre de ce cercle vaut $P = Na$, et son diamètre vaut $D = P / \pi = Na / \pi$
- Le nombre d'intersections n du cercle avec les lattes du parquet est donné par $n = 2 \times D / L = 2Na / \pi L$
- Finalement, on trouve bien le résultat annoncé dans la présentation :

$$p \approx \frac{n}{N} = \frac{2a}{\pi L}$$