Voyage en première classe au pays des nombres

« Des calculi mésopotamiens à la fonction zêta »

Clément Sire

Laboratoire de Physique Théorique

CNRS & Université Paul Sabatier

Toulouse, France

www.lpt.ups-tlse.fr/clement

Introduction

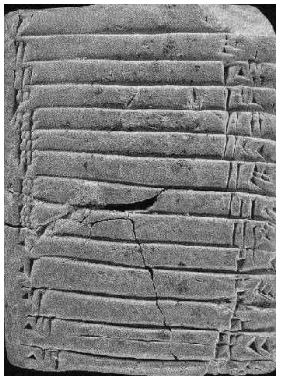
- La **théorie des nombres** (l'arithmétique) étudie les propriétés des **nombres entiers**
- Les nombres sont à la fois la **base des mathématiques**, mais savoir « compter » a aussi accompagné **l'essor de l'humanité**
  - **-30000 :** Présence d'entailles numériques

  - **-8000 :** Apparition des *calculi* au Moyen Orient

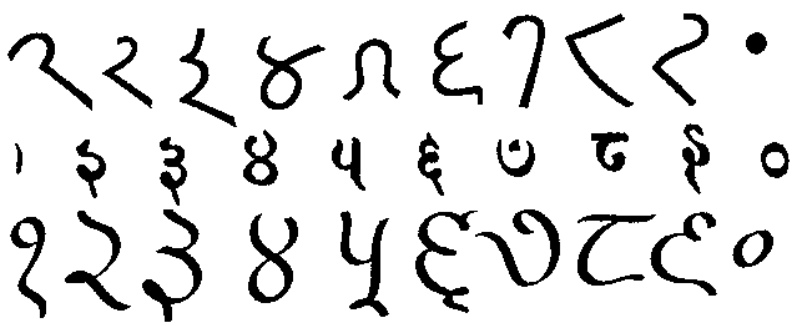
Calculi sumérien en base 60

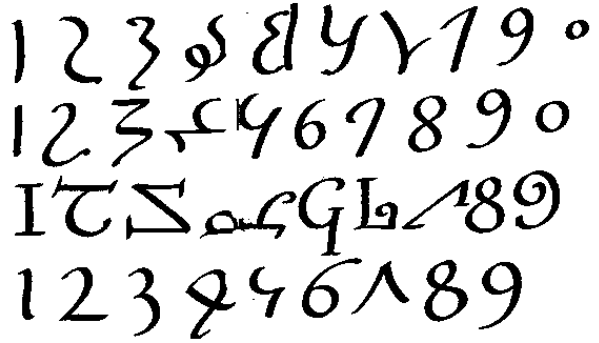
Introduction

- **-3300 :** Premiers chiffres (sunia → sifr → zefiro → zéro) à Sumer (~Iraq) et en Élam (~Iran). Naissance de l'écriture et de la numérotation écrite



- **-300 à +500 :** apparition de la graphie moderne et de la numération de position (Inde → Moyen Orient arabe → Afrique du Nord → Espagne maure)





Introduction

- La **théorie des nombres** a initié le développement des mathématiques et est à l'origine de nombre de ses sous domaines
- A l'inverse, les outils les plus complexes des mathématiques sont **revenus contribuer** à notre compréhension des propriétés des nombres entiers !
- Des **applications directes** aujourd'hui en cryptographie, informatique (« hashing », générateurs de « nombres aléatoires »…)…

Introduction

- La **théorie des nombres** présente une **esthétique** fascinante, s'attachant aux éléments les plus « simples » des mathématiques, au caractère **universel**, qui nous accompagnent tout le long de notre vie

- Contrairement à la plupart des autres branches des mathématiques, de nombreux **problèmes centraux** en théorie des nombres **peuvent être exposés aux néophytes**, même s'ils n'ont **pas encore été résolus** par les mathématiciens, et même s'ils impliquent en fait des outils et méthodes mathématiques **extrêmement sophistiqués**

Un bref historique

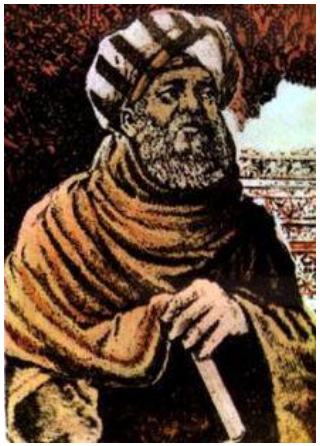
- **-800 :** équations diophantiennes en Inde
- **-600 à -200 :** l'âge d'or des mathématiques grecques (Pythagore, Diophante…)
- **500-700 :** le retour de l'Inde (Aryabhata, Brahma-gupta…)
- **800-1400 :** prééminence des mathématiciens arabes (Thabit ibn Qurra, Al-Baghdadi, Al-Haytham ou Alhazen…) et perses (Al-Farisi…)
- **À partir de 1600 :** la théorie des nombres prend son essor en Europe (Viète, **Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss**, Dirichlet, Jacobi, Kronecker, Kummer, Riemann, Tchebychev, Landau, Ramanujan, Serre, Wiles...), avant de s'internationaliser (USA, Japon...)

Quelques icônes de la théorie des nombres

Diophante

Aryabhata

Brahmagupta

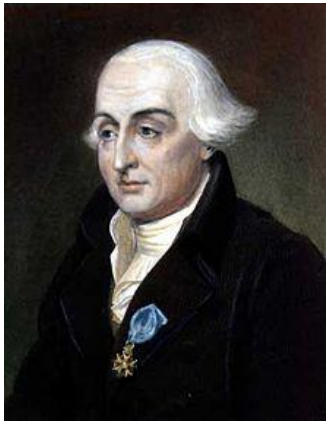


Thabit ibn Qurra

Al-Haytham

Fermat

Euler



Lagrange

Gauss

Legendre

Quelques problèmes célèbres

- Le **« dernier théorème de Fermat »** (Wiles 1994)

Il n'existe pas de nombres entiers non nuls *x*, *y* et *z* tels que :

$$x^n + y^n = z^n$$

dès que $n > 2$


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobea, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS

« … J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition. Mais la marge est trop étroite pour la contenir. »
Pierre de Fermat (~1595-1665)

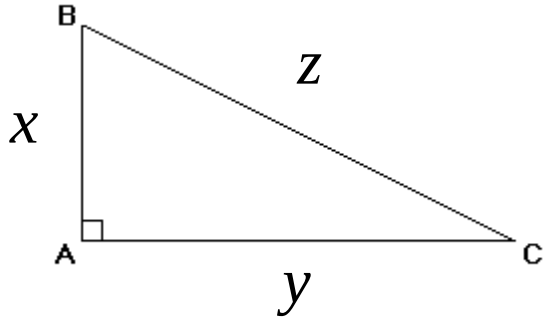
Contributions majeures de Euler, Legendre, Cauchy, Dirichlet, Germain, Lamé, Kummer, Hellegouarch, Langlands, Shimura, Taniyam, Weil, Frey, Serre, Ribet…

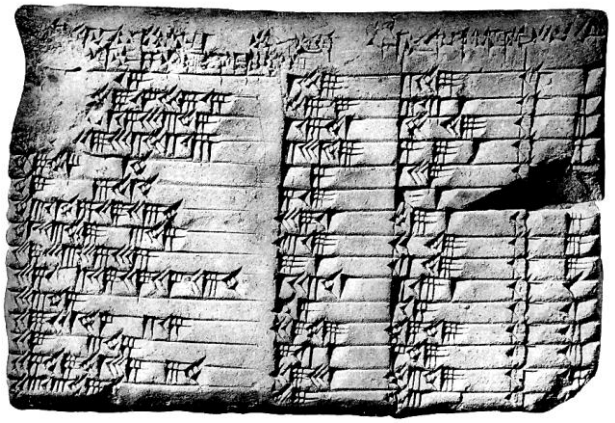
Les outils et méthodes impliqués sont d'une sophistication les plaçant à la pointe des mathématiques actuelles

Quelques problèmes célèbres

- Le **« dernier théorème de Fermat »** (Wiles 1994) : liens avec les « triplets pythagoriciens » et la géométrie (n=2)
- **Toutes les solutions** entières de $x^2 + y^2 = z^2$ s'écrivent sous la forme

  - $x = p^2 - q^2$
  - $y = 2pq$
  - $z = p^2 + q^2$





Plimpton 322 (Iraq -1800)

avec p et q entiers $(p > q)$

- **Exemple :** $p = 3,\ q = 1 \Rightarrow\ x = 8,\ y = 6,\ z = 10$

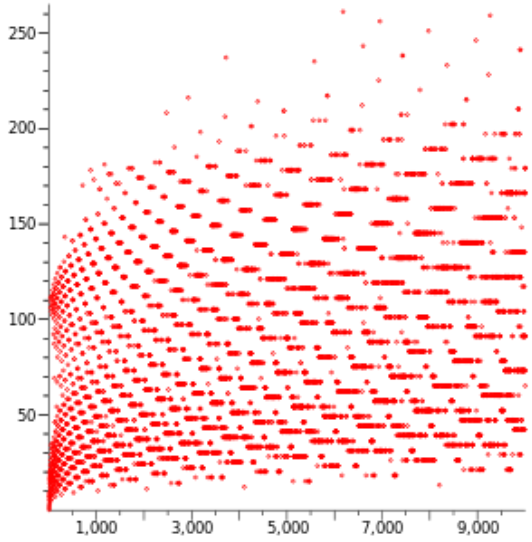
Irrationalité de nombres remarquables

- Un question majeure en mathématiques (liée à « l'analyse ») est de savoir si certains nombres sont **irrationnels** (ne peuvent s'écrire comme p/q), ou même **« transcendants »** (non solution d'un polynôme à coefficients entiers)
- **Exemples** (Leibniz, Lambert, Euler, Hermite, von Lindemann, Shimura…) **:**
  - $\sqrt{2}$ est irrationnel mais pas transcendant $(x^2 - 2 = 0)$
  - $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,718\ldots$ est transcendant
  - π est transcendant (l'impossible quadrature du cercle !)
  - $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}, \zeta(3), e^{p/q}, \log(p/q)\ldots$ (p/q fraction d'entiers) sont transcendants et donc irrationnels
  - $e + \pi, e\pi, \log(\pi), \pi^e, e^e, \log(2)\log(3), \zeta(5)$???

Quelques problèmes célèbres

- La **« conjecture 3n+1 »** (Collatz 1937)
  - On part d'un entier n quelconque
  - Si n est pair : $n \rightarrow n/2$
    Si n est impair : $n \rightarrow (3n+1)/2$
  - On recommence, sauf si on atteint n=1
- **Conjecture :** pour tout n initial, cette suite retourne à n=1

  « Les mathématiques ne sont pas encore mûres pour ce type de problèmes » – Paul Erdös



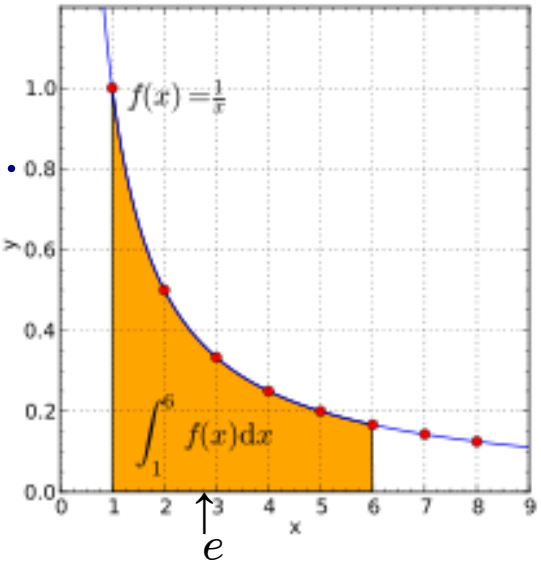
- **« Démonstration » :**

$$n_k \approx (1/2)^{k/2}(3/2)^{k/2} n_0 = (3/4)^{k/2} n_0$$

$$k_{\text{fin}} \approx 2\frac{\log(n_0)}{\log(4/3)}$$

La fonction logarithme (Napier 1614 ; Euler 1730)

- $\log(x)$ est **l'aire** entre 1 et x sous la courbe $y = 1/x$



- Il existe un unique nombre

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.7182818284\ldots$$

  tel que $\log(e) = 1$

- Si $x = e^y$ ($e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$; « l'exponentielle »), alors **inversement**, on a $y = \log(x)$

- Si $x_1 = e^{y_1}$ et $x_2 = e^{y_2}$, on a

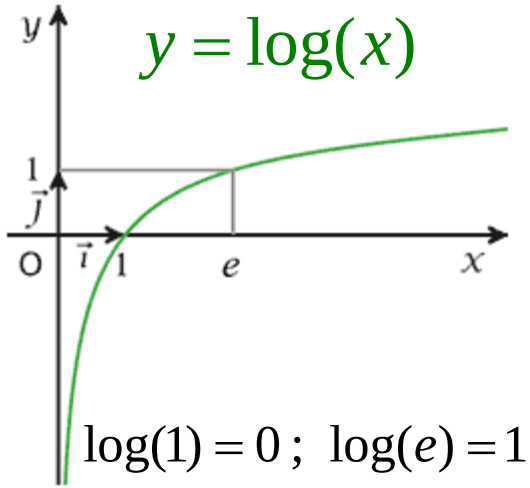
  $x_1 \times x_2 = e^{y_1} e^{y_2} = e^{y_1 + y_2}$

  et donc $\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$

- Si $x = a^y$, et comme $a = e^{\log(a)}$, on a

  $x = e^{y \log(a)}$

  et donc $y = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$



$\log(1) = 0$; $\log(e) = 1$

$\log(a^n) = n \times \log(a)$

Les nombres « premiers »

- **Définition :** un nombre premier **n'est divisible que par lui-même** (et par 1, bien sûr)
- **Exemples :** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,…, $2^{57\,885\,161} - 1$ (17 425 170 chiffres ; ~10^{80} atomes dans l'univers observable),…
- Il existe une **infinité** de nombres premiers
- Ils forment les **« briques élémentaires »** de l'ensemble de tous les entiers et, sont donc les objets les plus importants de la théorie des nombres
- Ils sont de plus en plus **« rares »** parmi les grands nombres

L'infinitude des nombres premiers

- Supposons qu'il n'existe **que** n nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_n$
- Mais alors, les deux nombres
  - $P = p_1 \times p_2 \times ... \times p_n + 1$
  - $Q = 1 \times 2 \times 3 \times 4 ... \times p_n + 1 = p_n ! + 1$

  ne sont divisibles par **aucuns** des n nombres premiers, et sont donc **tous les deux premiers !** (et plus grands que p_n)
- Cette **contradiction** avec notre hypothèse initiale implique qu'il existe une **infinité de nombres premiers** (Euclide ~-300)

Les nombres premiers vus comme « briques élémentaires »

- Tout nombre n est décomposable (ou factorisable) de **façon unique** en produit de nombres premiers

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k} \quad (a_i \geq 1,\ i = 1, \ldots, k)$$

- **Comment factoriser un nombre en facteurs premiers ?**
  - **Force brute :** le diviser successivement par les nombres premiers inférieurs (si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$, n est alors premier)
  - **Algorithme de Shor** (cryptographie)
- **Exemples :** factorisez **12276** et **197**

(*Rappel :* 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,…)

- $12276 = 2^2 \times 3^2 \times 11^1 \times 31^1$
- $197 = 197^1$ est premier (arrêt après 13, car $17^2 = 289$)

PGCD

- **Définition :** deux nombres n_1 et n_2 sont **premiers entre eux (PEE)** si et seulement si le **plus grand diviseur commun** (PGCD) est 1
- Pour trouver le PGCD, il suffit de compter les facteurs premiers en commun entre n_1 et n_2

  Il existe des entiers relatifs tels que $an_1 + bn_2 = \text{PGCD}(n_1, n_2)$

  (théorème de Bachet-Bézout 1624)
- **Exemples :**
  - $n_1 = 24 = 2^3 \times 3^1$ et $n_2 = 245 = 5^1 \times 7^2$

    sont premiers entre eux et $5 \times n_2 - 51 \times n_1 = 1$
  - $n_1 = 120 = 2^3 \times 3^1 \times 5$ et $n_2 = 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$

    ne sont pas premiers entre eux et $1 \times n_2 - 2 \times n_1 = 12$

    avec comme PGCD $2^2 \times 3^1 = 12$ $(n_1 / 12 = 10 ;\ n_2 / 12 = 21)$

Arithmétique et « probabilités »

- Si on prend deux nombres entiers n_1 et n_2 au hasard, quelle est la **« probabilité »** P_2 pour qu'ils soient **premiers entre eux** (PEE) ?
- $1-P_2$ est la probabilité pour qu'il ne soient pas PEE
- La probabilité pour que leur PGCD soit n est que n divise n_1 et n_2, et que n_1/n et n_2/n soient PEE
  Cet événement a comme probabilité

$$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\times P_2=\frac{P_2}{n^2}$$

- Au total,

$$1-P_2=\frac{P_2}{2^2}+\frac{P_2}{3^2}+\frac{P_2}{4^2}+\frac{P_2}{5^2}+\ldots=P_2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$P_2=1/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1/\zeta(2),\quad \text{avec}\quad \zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

Les nombres premiers

- Plus généralement, la probabilité pour que k nombres soient PPE est

$$P_k = 1/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = 1/\zeta(k)$$

ou $\zeta(k)$ est la **fonction zêta de Riemann**, omniprésente en théorie des nombres

- $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$... (Euler) ; $\zeta(3)$ est irrationnel (Apéry 1978)

- **Expériences :** par deux, choisissez chacun un nombre au hasard entre 2 et 61. Nous compterons le pourcentage de paires PPE, qui devrait être proche de 60% ($P_2 = 1/\zeta(2) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079...$)

Les nombres premiers se font de plus en plus rares !

- On définit
  $\Pi(n) = \#$ de nombres premiers $\leq n$

  En particulier, $\Pi(p_n) = n,$ si p_n est le n-ième nombre premier

- **« Théorème des nombres premiers »**
  (La Vallée Poussin & Hadamard 1896)

$$\Pi(n) \approx \frac{n}{\log(n)}, \quad \text{quand } n \to \infty$$

- **« Théorème des nombres premiers » amélioré**
  (La Vallée Poussin 1899)

$$\Pi(n) \approx \int_0^n \frac{dx}{\log(x)} = \mathrm{li}(n), \quad \text{quand } n \to \infty$$

n	$\Pi(n)$	$\Pi(n)-\frac{n}{\log(n)}$	Erreur Relative (%)
10^2	25	3	15
10^4	1 229	143	13
10^6	78 498	6 116	8,4
10^9	50 847 534	2 592 592	5,4
10^{12}	37 607 912 018	1 416 705 193	3,9
10^{18}	24 739 954 287 740 860	612 483 070 893 536	2,5
10^{23}	1 925 320 391 606 803 968 923	37 083 513 766 578 631 309	2,0

n	$\Pi(n)$	$\mathrm{li}(n)-\Pi(n)$	Erreur Relative (%)
10^2	25	5	20
10^4	1 229	17	1,3
10^6	78 498	130	0,17
10^9	50 847 534	1 701	$3{,}3\times10^{-3}$
10^{12}	37 607 912 018	38 263	$1{,}0\times10^{-4}$
10^{18}	24 739 954 287 740 860	21 949 555	$8{,}9\times10^{-8}$
10^{23}	1 925 320 391 606 803 968 923	7 250 186 216	$4{,}0\times10^{-10}$

Conséquences du théorème des nombres premiers

- $P(n) = \Pi(n) - \Pi(n-1)$ est une mesure de la **« probabilité »** pour que n soit premier

  Pour des grands n, le théorème des nombres premiers implique (en moyenne)

$$P(n) \approx \frac{1}{\log(n)}$$

- Il donne aussi une **estimation** du n-ième nombre premier, quand n est grand :

$$\Pi(p_n) = n \approx \frac{p_n}{\log(p_n)} \Rightarrow p_n \approx n\log(n)$$

Conjecture de Goldbach (1742)

- Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la **somme de 2 nombres premiers**
- **Exemples :** **4** = 2 + 2, **6** = 3 + 3, **8** = 3 + 5, **10** = 3 + 7 = 5 + 5, **12** = 5 + 7,…, **50** = 19 + 31 = 13 + 37 = 7 + 43 = 3 + 47,…

- **« Preuve probabiliste » (aucune preuve connue)**

La probabilité que $n = p + (n - p)$, avec p et $(n - p)$ premiers est

$$P(p) \times P(n-p) \approx \frac{1}{\log(p)} \times \frac{1}{\log(n-p)}$$

Le nombre $N_2(n)$ de façons d'écrire n comme la somme de deux nombres premiers est donc

$$N_2(n) \approx \sum_{p=3}^{n/2} \frac{1}{\log(p)} \times \frac{1}{\log(n-p)} \approx \frac{n}{\log^2(n)} \gg 1$$

Conjecture des nombres premiers « jumeaux » et de Polignac (1849)

- Pour tout $k \geq 1$, il existe une **infinité de nombres premiers** p tels que $p+2k$ est **aussi premier**
- **Exemples** $(k=1)$ **:** (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139),…, $2003663613 \times 2^{195000} \pm 1$ (58711 chiffres ; Vautier 2007),…, $375680169568 5 \times 2^{666669} \pm 1$ (200700 chiffres ; *PrimeGrid* 2011),…

- **Meilleurs résultats rigoureux connus**
  - Le nombre de jumeaux inférieurs à n est borné par $\frac{n}{\log^2(n)}$ (Brun 1911)
  - Il y a une infinité de k – jumeaux pour au moins un $k < 35$ millions (Zhang 2013 ; borne améliorée à 2707 par le projet *Polymath*)

Conjecture des nombres premiers jumeaux et de Polignac (1849)

➢ « Preuve probabiliste » (aucune preuve connue)

La probabilité que p et $p+2k$ soient premiers est

$$P(p)\times P(p+2k)\approx \frac{1}{\log(p)}\times\frac{1}{\log(p+2k)}$$

Le nombre $J_k(n)$ de k – jumeaux inférieurs à n est donc de l'ordre

$$J_k(n)\approx \sum_{p=3}^{n}\frac{1}{\log(p)}\times\frac{1}{\log(p+2k)}\approx C_k\,\frac{n}{\log^2(n)}$$

Conjecture de Hardy-Littlewood (1911)

$$C_1 = 2\prod_{\substack{p\geq 3\\ p\in\mathcal{P}}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\approx 1,3203236316937...$$

Deux conjectures fausses

- **Nombres premiers de Fermat** $F_n = 2^{2^n} - 1$

  $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65\,537$ sont premiers,

  mais... $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ (Euler 1732)

- **Une conjecture « numérique » de Gauss**

  (liée au théorème de La Vallée Poussin de 1899)

$$\Pi(n) < \int_0^n \frac{du}{\log(u)} = \mathrm{li}(n)$$

On ne connaît pas de **contre-exemple** explicite, mais **il a été démontré** qu'il existe au moins un $n < 10^{350}$ qui contredit cette inégalité

Les nombres de Mersenne (1588-1648)

- Les **nombres de Mersenne** s'écrivent sous la forme

$$M_p = 2^p - 1, \text{ où } p \text{ est premier}$$

- Ils sont des bons **candidats** pour former des nombres premiers. Leur intérêt est qu'il existe des **algorithmes très rapides** pour vérifier si M_p est premier (Lucas 1878 ; Lehmer 1930)

- Avec les **progrès de l'informatique**, les plus grands nombres premiers connus sont des nombres de Mersenne (48 connus en 2013) :

  $M_{19} = 524\,287$ (Cataldi 1588), $M_{31} = 2\,147\,483\,647$ (Euler 1750),

  $M_{127} = 39$ chiffres (Lucas 1876), $M_{521} = 157$ chiffres (SWAC 1952),

  $M_{1398269} = 420\,921$ chiffres (GIMPS 1996),

  $M_{57885161} = 17\,425\,170$ chiffres (GIMPS 01/2013 ; 360000 processeurs),...

Liens entre la fonction zêta de Riemann et les nombres premiers : formule d'Euler

- Si $|x|<1$, on a $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}x^k$ (somme géométrique)

  En effet, $(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right)=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$

  $$-x-x^2-x^3-x^4-\ldots=1$$

- **Considérons** $\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\times\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$,

  qui peut s'écrire en développant en séries géométriques

  $$\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\ldots\right)\times\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\ldots\right)\times$$

  $$\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\frac{1}{5^{3s}}+\ldots\right)\times\left(1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{7^{2s}}+\frac{1}{7^{3s}}+\ldots\right)\times\ldots$$

Liens entre la fonction zêta de Riemann et les nombres premiers : formule d'Euler

En développant ces produits, on obtient **chaque entier une fois exactement** (unicité de la factorisation en facteurs premiers)

$$\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{2^{3s}}+\ldots\right)\times\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{3^{3s}}+\ldots\right)\times$$

$$\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\frac{1}{5^{3s}}+\ldots\right)\times\left(1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{7^{2s}}+\frac{1}{7^{3s}}+\ldots\right)\times\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{2^s}\times\frac{1}{3^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{2^{3s}}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{2^s}\times\frac{1}{5^s}+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{10^s}+\ldots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$

Fonction zêta de Riemann et fonction de Möbius

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\times\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\times\ldots,$$

On définit alors la **fonction de Möbius** pour $n = p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\ldots\times p_k^{a_k}$

- $\mu(n)=0$, si n possède au moins un facteur premier p_i avec $a_i>1$

  (divisible par un carré, comme p_i^2)
- $\mu(n)=1$, si k est pair et tous les a_i valent 1
- $\mu(n)=-1$, si k est impair et tous les a_i valent 1

On a clairement

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$$

Remarque : si n_1 et n_2 sont PPE, alors $\mu(n_1\times n_2)=\mu(n_1)\times\mu(n_2)$

(fonction arithmétique multiplicative)

Fonctions de Möbius et de Mertens

- On peut montrer que $\sum_{k=1}^{n} |\mu(k)| = \sum_{k=1}^{n} \mu^2(k) \approx \frac{6}{\pi^2} n$

  En admettant qu'il y ait, en moyenne, autant de n pour lesquels $\mu(n) = \pm 1$, on a $\mu(n) = +1$ (ou -1) avec probabilité $\frac{3}{\pi^2}$, et $\mu(n) = 0$ avec probabilité $1 - \frac{6}{\pi^2}$

- On définit la **fonction de Mertens** $M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$

On a alors l'estimation $M^2(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^2(k) + 2\sum_{i \neq j} \mu(i)\mu(j) \approx \frac{6}{\pi^2} n,$

liée à la **conjecture de Mertens** (Stieljes 1885 ; Mertens 1897) $M^2(n) < n$, qui a été pourtant **infirmée pour une infinité de** n par Odlyzko et te Riele (1985)... sans qu'aucun contre-exemple explicite ne soit connu ! *À suivre*...

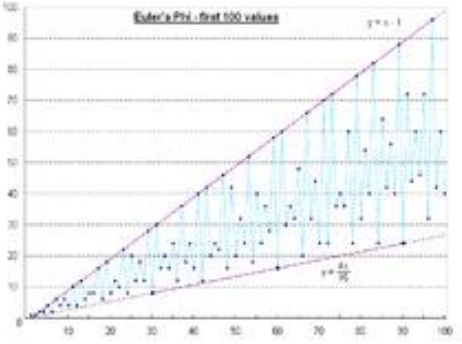
Indicatrice d'Euler

On définit la **fonction indicatrice d'Euler**

$\phi(n) = \#$ d'entiers inférieurs à n qui sont premiers avec n

- Si $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$, $\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$
- Si n_1 et n_2 sont PPE, alors $\phi(n_1 \times n_2) = \phi(n_1) \times \phi(n_2)$
- **Quelques propriétés remarquables :**
  - $\phi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$; $\sum_{d|n}\phi(d) = n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$
  - $\sum_{k=1}^{n}\phi(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\left[\frac{n}{k}\right]^2 \approx P_2 \times \#\text{ de paires} \approx \frac{3}{\pi^2}n^2$
  - $1 < \frac{n}{\phi(n)} < e^{\gamma}\log\log(n) + \frac{3}{\log\log(n)}$

    $(\gamma = 0,5772156649\ldots)$



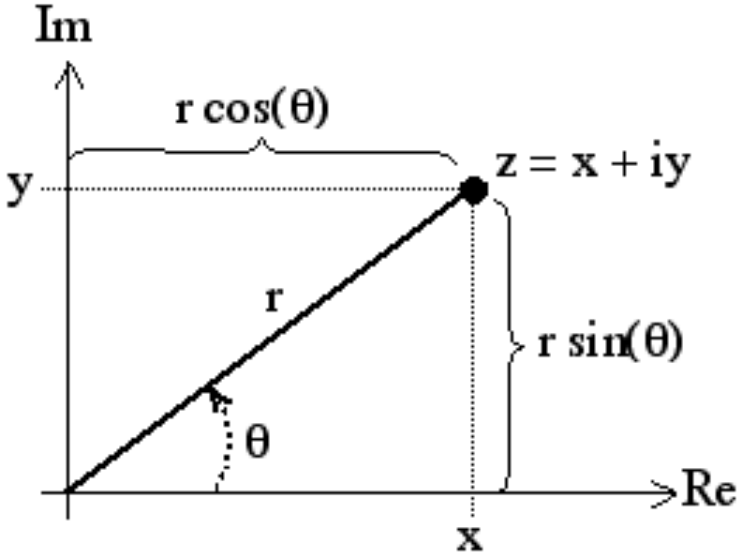
Les nombres « complexes » (Cardan 1545, Bombelli 1572)

- On définit **formellement** i tel que i^2=-1
- Un **nombre complexe général** s'écrit $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels usuels
- On réalise les **opérations usuelles** (+,-,×,÷) **« normalement »** :
  - $(2+3i)+(1-7i)=3-4i$
  - $(1+3i)\times(2-5i)=2-5i+6i-15i^2=17+i$
  - $\dfrac{1}{1+2i}=\dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{1-2i}{1+2i-2i-4i^2}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$
- **Exercice :**

  Montrer que pour $x=1+2i$ et $x=1-2i$, on a $x^2-2x+5=0$

Les nombres « complexes » : interprétation géométrique

- On peut **représenter** de façon naturelle le nombre complexe $z = x + iy$ dans le plan (dit « complexe »)



- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagore)
- $x = r\cos(\theta)$ (la partie *réelle*)
- $y = r\sin(\theta)$ (la partie *imaginaire*)

- **L'addition de deux nombres complexes revient à une addition de vecteurs**

L' hypothèse de Riemann (1859) : le « Graal » des mathématiciens

- On peut **étendre la fonction zêta de Riemann** aux nombres complexes $z = x + iy$, en posant

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

et en utilisant

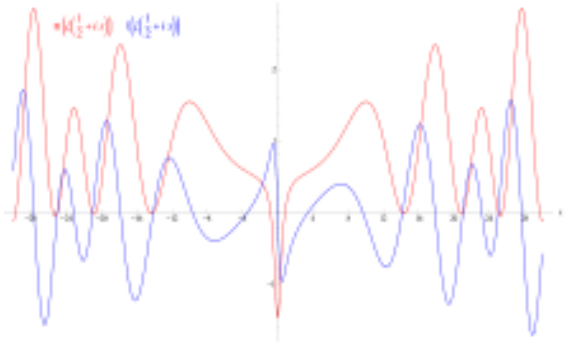
$$\frac{1}{n^z} = e^{-z \times \log n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z \log n)^k}{k!}$$

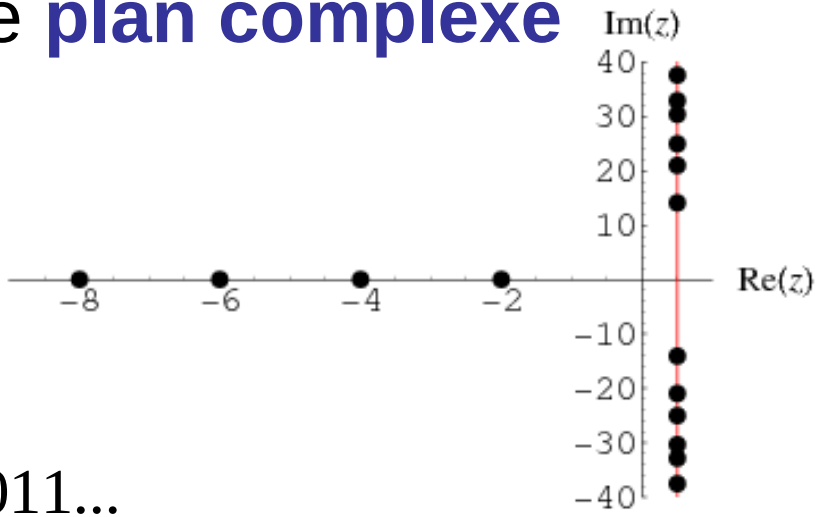
$$\left(\text{car } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)$$

L' hypothèse de Riemann (1859) : le « Graal » des mathématiciens

- $\zeta(z)$ **s'annule** (c'est-à-dire $\zeta(z)=0$) **uniquement pour**
  - $z=-2,-4,-6,-8...$ (les zéros "triviaux" de ζ)
  - Et pour des nombres complexes de la forme $z_k=\frac{1}{2}\pm iy_k$

- **Interprétation géométrique :** les **zéros non triviaux** de zêta sont **tous** sur la droite verticale $x=\frac{1}{2}$ (la « ligne critique ») dans le **plan complexe**





$y_1=14{,}135...,\ y_2=21{,}022...,\ y_3=25{,}011...$

L' hypothèse de Riemann (1859): le « Graal » des mathématiciens

- C'est l'un des **23 problèmes majeurs** énoncés par **Hilbert** en 1902 (seuls 5 restent totalement non résolus, dont l'hypothèse de Riemann)
- C'est l'un des **8 problèmes** récompensés par un prix de 1 000 000$ par la *Clay Foundation* (seule la conjecture de Poincaré a été résolue en 2003 par Perelman, qui a refusé le prix)
- L'hypothèse de Riemann est **confirmée numériquement**, et 10^{13} zéros ont été identifiés (et calculés numériquement) sur la ligne critique, ainsi que quelques zéros pour des très grands y_k (de l'ordre de 10^{24})
- Si elle est vraie, l'hypothèse de Riemann aurait une **multitude d'implications** en théorie des nombres, et en particulier, sur notre compréhension de la **répartition des nombres premiers**

Quelques conséquences de l'hypothèse de Riemann (HR)

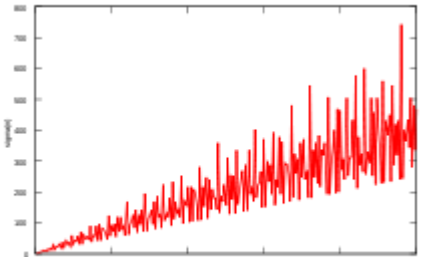
- **Bornes** « optimales » de **l'erreur de différentes estimations** apparaissant en théorie des nombres
  - $|\Pi(n) - \mathrm{li}(n)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{n}\log(n),$ pour tout $n \geq 2657$
  - On définit la **fonction de Mertens** $M(n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(k)$

    HR implique $|M(n)| < n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et n assez grand

    alors que $|M(n)| > \sqrt{n},$ pour une infinité de valeurs de n
- HR est **équivalente** à de **nombreuses conjectures** en théorie des nombres
  - Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \log(n) + \gamma + \ldots,$ alors (Lagarias 2002)

    HR $\Leftrightarrow \sigma(n) < H_n + \log(H_n)e^{H_n},$ pour $n > 1$

    où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n



Conclusion d'un voyage dans le temps (~10 000 ans), et parmi les nombres (de 1 à ∞… en passant par i) !

$$\approx \zeta\left(1+\frac{1}{2^5\times 3^2\times 5^3-\gamma}\right)$$

(À mieux qu'un millionième de % près !)