

Ecole Polytechnique
Promotion X2005
Vincent DÉMERY
en binôme avec Giovanni PELONI

Rapport de stage d'option scientifique

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES CORDES

non confidentiel

Option :	Physique.
Champ de l'option :	Physique théorique des particules.
Directeur de l'option :	Pierre FAYET.
Directeurs de stage :	Marios PETROPOULOS, Costas KOUNNAS, Hervé PARTOUCHE.
Dates du stage :	du 8 avril au 30 juin 2008.
Adresse de l'organisme :	CPHT, Ecole Polytechnique.

Résumé

Nous faisons nos premiers pas de théoriciens des cordes avec la corde classique. Nous donnons les bases de théorie conforme : de l'action à l'algèbre des opérateurs après quantification. Nous étudions le spectre de la corde bosonique compte tenu de la présence des fantômes. Nous introduisons la supercorde et donnons ses principales propriétés. L'invariance modulaire de la fonction de partition sur le tore nous indique comment choisir des secteurs convenables qui engendrent des fermions mais pas de tachyon. Enfin, nous discutons la compactification toroïdale, la dualité T, les cordes ouvertes et les D-branes. Nous utilisons ces outils pour donner un modèle ressemblant au modèle standard.

Abstract

We take our first steps in string theory with the classical string. We give the basis of conformal theory : starting from the action, we deduce the operator algebra after quantization. We study the bosonic string spectrum, taking account of the ghosts. We introduce the superstring and review its main properties. Its partition function on the torus must be modular invariant, which indicates how to choose properly among sectors to obtain fermions and no tachyon. At last, we discuss toroidal compactification, T duality, open strings and D-branes. We use these tools to build a standard model-like model.

Remerciements

Moi, je pense que la physique, c'est facile.

Jean-Luc PARIZE, professeur de physique en
PSI* au lycée Pierre de Fermat.

JE REMERCIE avant tout Marios Petropoulos, Costas Kounnas et Hervé Partouche pour nous avoir acceptés puis aidés pour ce stage. Leurs styles très différents nous ont été très enrichissants.

Merci aussi à Giovanni et Koju, sans qui ce stage aurait été beaucoup trop solitaire. Ne pas pouvoir partager ces « découvertes » aurait été extrêmement frustrant.

Enfin, j'adresse un immense merci à tous ceux qui ont fait que ces trois mois de stage, mes trois derniers mois à l'Ecole Polytechnique, n'ont pas été uniquement professionnels.

Table des matières

Introduction	1
1 La corde classique	3
1.1 Principe géométrique, action de Nambu-Goto	3
1.2 Action de Polyakov	4
1.3 Equations du mouvement	5
2 Cordes et éléments de théorie conforme	9
2.1 Cordes et bosons libres sur le cylindre complexe	9
2.2 Quantification, opérateurs et symétries	10
2.3 Transformations conformes	13
2.4 Décomposition en modes, algèbre de Virasoro	16
3 Quantification de la corde bosonique	19
3.1 Tentative de quantification canonique	19
3.2 Nullité du tenseur énergie-impulsion et particules	21
3.3 Quantification par l'intégrale de chemin	22
3.4 Fonction de partition sur le tore	24
3.5 Spectre de la corde bosonique	26
4 La supercorde	29
4.1 Action et symétries	29
4.2 Spectre de la supercorde	31
4.3 Fonction de partition et choix des secteurs	34
5 De la compactification aux D-branes : vers le modèle standard	39
5.1 Compactification de l'espace-temps et dualité T	39
5.2 Cordes ouvertes et branes de Dirichlet	41
5.3 Quelques compléments	45
5.4 Aperçu du modèle standard	46
Conclusion	49
Bibliographie	51

Introduction

ACTUELLEMENT, deux modèles effectifs décrivent toute la physique connue : le modèle standard et la relativité générale. Néanmoins, ils ne sont pas exempts de tout reproche :

- l'unicité : deux théories sont nécessaires et non pas une seule, ce qui n'est pas tout à fait satisfaisant. En effet, il a été démontré qu'une théorie quantique de la gravitation serait non renormalisable, c'est-à-dire qu'il est impossible de décrire la gravitation avec les outils du modèle standard.
- l'esthétique du modèle standard : celui-ci semble contenir beaucoup de paramètres arbitraires. De plus, de nombreuses divergences apparaissent avec les premiers principes, et une renormalisation est nécessaire ; et cette procédure n'est pas très naturelle.

La théorie des cordes a donc été introduite pour tenter de résoudre ces deux problèmes. Dans cette théorie, les objets fondamentaux sont les cordes, et les particules observées correspondent aux vibrations de ces cordes. Le fait de ne plus avoir d'objet ponctuel semble pouvoir supprimer les divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs. Le graviton apparaît naturellement comme un état d'excitation de la corde fermée. Les interactions elles-aussi pourraient être décrites de manière unifiée.

Dans cette introduction, nous présentons les bases de la théorie des cordes, en portant une attention particulière à ce qu'elle permet de décrire. Nous partons de la corde classique, déterminons son action et la quantifions. Cette corde, aussi appelée corde bosonique, a un spectre intéressant (qui contient déjà le graviton) mais souffre de défauts rédhibitoires : elle engendre un tachyon mais pas de fermions, ce qui compromet sérieusement son aptitude à décrire les particules que nous voyons.

Pour panser ces plaies, nous rajoutons des coordonnées fermioniques à la corde. Après quelques acrobaties, le résultat est stupéfiant : il y a des fermions et le tachyon a disparu !

Enfin, pour nous rapprocher d'une représentation réaliste, nous effectuons une compactification partielle de l'espace-temps pour le ramener des dix dimensions imposées par la théorie des cordes aux quatre dimensions que nous connaissons. De nouveaux objets entrent en scène : les D-branes, sur lesquelles sont attachées les cordes ouvertes. Munis de cette boîte à outils, nous effleurerons quelques constituants du modèle standard.

1

La corde classique

Nous définissons deux actions, celle de Nambu-Goto et celle de Polyakov, pour une corde classique. Nous montrons ensuite qu'elles sont équivalentes et nous calculons les équations du mouvement. Nous étudions les cas de la corde ouverte et de la corde fermée.

1.1 Principe géométrique, action de Nambu-Goto

A. Cas de la particule ponctuelle

Il existe deux possibilités pour l'action d'une particule ponctuelle libre. Celle qui se généralise facilement au cas de la corde est celle qui est définie par la longueur de la trajectoire de la particule. Notons $X^\mu(\lambda)$ cette trajectoire, l'action est alors

$$S_{\text{pp}} = -m \int d\lambda |\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu|^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

où $\dot{X}^\mu = \frac{dX^\mu}{d\lambda}$ et m est la masse de la particule.

B. Action de Nambu-Goto

Comme la particule ponctuelle, au cours de son mouvement, « trace une courbe » (sa trajectoire), la corde, en se déplaçant, décrit une surface. La trajectoire de la corde est donnée par un plongement du *feuillelet d'univers* dans l'espace-temps dans lequel la corde évolue. Le *feuillelet d'univers* est une surface bidimensionnelle, munie d'un système de coordonnées (τ, σ) ; τ est le « temps propre » (il s'agit de λ pour la particule ponctuelle) et σ la position le long de la corde. Le plongement est noté $X^\mu(\tau, \sigma)$, μ décrivant les D dimensions de l'espace-temps.

Par analogie avec la particule ponctuelle, l'action de Nambu-Goto de la corde est l'aire de la surface décrite par la corde. Pour la corde, on voit facilement que l'élément d'aire est proportionnel à la racine du déterminant de la métrique induite (sur la surface, à partir de la métrique de Minkowski); ceci est plus facile à voir avec une métrique euclidienne. On a donc, pour l'action de Nambu-Goto :

$$S_{\text{NG}} = -T \int d^2\sigma |\det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu)|^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

avec $(a, b) \in \{1, 2\}$ et T la tension de la corde. On utilise plus souvent

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (1.3)$$

où α' est la *penne de Regge*, qui a la dimension d'une longueur au carré.

L'espace-temps où vit la corde est considéré plat, sauf mention contraire.

C. Symétries

Voyons maintenant les symétries de cette action. Celles-ci sont évidentes :

- l'invariance sous le groupe de Poincaré (le groupe des isométries de l'espace-temps). En effet, le produit scalaire utilisé pour la contraction sur μ dans l'action 1.2 est, par définition, invariant par les isométries,
- l'invariance par reparamétrisation. Une formulation géométrique de l'action de Nambu-Goto ne fait apparaître que des grandeurs géométriques indépendantes de la paramétrisation du feuillet d'univers (i.e. du système de coordonnées choisi sur ce feuillet). On parle aussi de symétrie sous le groupe des difféomorphismes (i.e. le groupe de reparamétrisation), noté Diff.

1.2 Action de Polyakov

L'action de Nambu-Goto, géométrique, n'est pas facile à quantifier à cause de la racine carrée qu'elle contient. L'action de Polyakov¹ résout ce problème.

A. Action de Polyakov

Dans l'action de Nambu-Goto, les D variables X^μ donnant la position de la corde peuvent être considérées comme des champs vivant sur le feuillet d'univers. Le passage à l'action de Polyakov consiste à remplacer la métrique induite par une métrique h_{ab} constituant une variable supplémentaire.

Cette méthode, utilisée directement, fait disparaître la dépendance de l'action en les champs. Pour palier ce problème, on utilise l'astuce suivante : on multiplie la quantité sous l'intégrale par $1 = \frac{1}{2}(\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu) \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ et on considère seulement le terme entre parenthèses comme l'inverse de la métrique induite, à remplacer par l'inverse de la nouvelle métrique. On obtient ainsi

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{|h|} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (1.4)$$

où $h = \det h_{ab}$. Par la suite nous noterons simplement S cette action.

B. Symétries

Les symétries sont celles obtenues précédemment plus une troisième symétrie :

- la symétrie de Poincaré qui ne modifie que les champs position. Du point de vue de champs vivant sur le feuillet d'univers, c'est une symétrie interne,
- la symétrie sous le groupe des difféomorphismes, qui ne modifie que la métrique h_{ab} de la façon usuelle. Elle est assez facile à montrer

¹Cette action a en fait été introduite par Brink, Di Vecchia et Howe et indépendamment par Deser et Zumino. Polyakov a étudié sa quantification par l'intégrale de chemin.

- la symétrie de Weyl : l'action de Polyakov est invariante sous une dilatation locale de la métrique,

$$h'_{ab} = e^{2\omega(\tau,\sigma)} h_{ab}. \quad (1.5)$$

Cette transformation ne laisse l'action invariante qu'en raison de la dimension 2 du feuillet d'univers. Cette symétrie n'est pas naturelle, on la qualifie d'accidentelle. Le groupe des transformations de Weyl sera simplement noté Weyl.

C. Equivalence à l'action de Nambu-Goto

Il faut maintenant montrer que cette action est équivalente à celle de Nambu-Goto. Pour cela, il suffit de résoudre l'équation du mouvement pour la métrique. Calculons le tenseur énergie-impulsion, proportionnel à la variation de l'action par rapport à la métrique, qui doit être nul lorsque l'action est extrémale :

$$T_{ab} = -\frac{4\pi\alpha'}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} \gamma_{cd} h^{cd} = 0 \quad (1.6)$$

où $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ est la métrique induite.

La solution de cette équation est obtenue pour une métrique h_{ab} proportionnelle à la métrique induite γ_{ab} . La symétrie de Weyl implique alors que cette action redonnera les mêmes équations du mouvement pour les champs X^μ que l'action de Nambu-Goto.

Dans le calcul ci-dessus, nous avons supposé que $h < 0$ en anticipant sur le résultat. Il est clair que supposer $h > 0$ aurait donné la même équation pour h_{ab} à un signe près, d'où une contradiction.

Remarquons que la symétrie de Weyl se retrouve dans le tenseur énergie impulsion. Dans une transformation de Weyl infinitésimale, la variation de la métrique est proportionnelle à la métrique : $\delta h^{ab} = \epsilon h^{ab}$. Sous cette transformation, l'action est invariante et

$$0 = \delta S = \frac{\delta S}{\delta h^{ab}} \epsilon h^{ab} \propto T_{ab} h^{ab} = T^a_a. \quad (1.7)$$

L'invariance de Weyl implique l'annulation de la trace du tenseur énergie impulsion, même en dehors des solutions des équations du mouvement. Nous utiliserons plus tard ce résultat. L'annulation de cette trace se déduit aussi directement de l'expression 1.6.

1.3 Equations du mouvement

Après avoir déterminé les équations du mouvement, nous étudions les cas des cordes fermée et ouverte.

A. Equations du mouvement

Calculons la variation de l'action par rapport aux variations des champs position, sans se soucier des termes de bord. Une intégration par parties donne :

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_b (\sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu) \delta X_\mu. \quad (1.8)$$

Et l'équation du mouvement est donc

$$\partial_b(\sqrt{-h}h^{ab}\partial_a X^\mu) = 0 \quad (1.9)$$

qui est une généralisation de $\square X^\mu = 0$ pour une métrique quelconque. Cette équation est l'équation du mouvement à l'intérieur de la corde.

Pour la corde fermée, on peut considérer le feuillet d'univers comme un cylindre, qui n'a pas de bord. Pour la corde ouverte, le feuillet d'univers est une « bande », dont les bords correspondent aux trajectoires des extrémités de la corde. Ces trajectoires sont a priori indépendantes, et les conditions au bord ne peuvent pas les relier.

Pour l'équation au bord, il suffit d'annuler aussi les termes de bord qui apparaissent dans l'intégration par parties. En demandant l'annulation sur chaque bord, on obtient l'équation :

$$\partial^\sigma X^\mu \delta X_\mu = 0 \quad (1.10)$$

où σ décrit la position le long de la corde, la condition étant que les courbes de niveau de σ ne soient pas tangentes au bord du feuillet d'univers. Cette équation donne deux types de conditions :

- si le bout de la corde est libre selon la direction e , δX^μ peut être non nul selon cette direction, donc on doit imposer

$$e_\mu \partial^\sigma X^\mu = 0. \quad (1.11)$$

Il s'agit d'une condition de Neumann.

- si le bout de la corde est fixé selon la direction e , on a simplement

$$e_\mu \delta X^\mu = 0. \quad (1.12)$$

C'est une condition de Dirichlet.

On peut en effet imaginer que les bouts de la corde ouverte soient fixés à des surfaces (ou *branes*).

B. Fixation de la jauge

La résolution des équations du mouvement donne la métrique h_{ab} proportionnelle à la métrique induite, donc de signature $(-1, 1)$. Les symétries de reparamétrisation et de Weyl permettent de fixer trois degrés de liberté (deux dimensions pour la reparamétrisation et un pour Weyl), et la métrique a justement trois composantes indépendantes. Les symétries permettent donc de choisir les coordonnées et la dilatation de la métrique pour avoir pour la métrique solution

$$h_{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Cette fixation de jauge est détaillée dans [1], §7.

Réécrivons les équations précédentes dans cette jauge. L'équation 1.9 devient

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu = 0 \quad (1.14)$$

Les équations aux bords ne sont pas modifiées.

C. Décomposition en modes

La décomposition en modes joue un rôle fondamental dans la quantification de la corde : les coefficients de la décomposition sont faciles à quantifier.

Cas de la corde fermée

Pour la corde fermée, prenons une longueur de corde de 2π . Le fait que le feuillet d'univers soit un cylindre impose la condition de périodicité

$$X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (1.15)$$

Les solutions de 1.14 s'écrivent de manière générale sous la forme

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \right). \quad (1.16)$$

La réalité de X^μ impose

$$\alpha_{-n}^\mu = \overline{\alpha_n^\mu} \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = \overline{\tilde{\alpha}_n^\mu}. \quad (1.17)$$

Cas de la corde ouverte

Pour la corde ouverte, prenons une longueur de π . Nous utilisons ici des conditions aux limites de Neumann, a priori plus naturelles que celles de Dirichlet car elles ne nécessitent aucun objet supplémentaire. Avec ces conditions, la quantité de mouvement de la corde est conservée. La décomposition en modes est alors

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (1.18)$$

et la réalité de X^μ implique 1.17.

Le facteur de p^μ diffère de celui de la corde fermée car il est défini pour faire correspondre p^μ avec la « vraie » quantité de mouvement de la corde, donnée par $\Pi^\mu = T \int d\sigma \partial_\tau X^\mu$.

2

Cordes et éléments de théorie conforme

Nous récrivons l'action de Polyakov en coordonnées complexes afin de la quantifier dans le formalisme de l'intégrale de chemin. En étudiant ses symétries, une invariance plus large que prévu apparaît : l'invariance conforme. On calcule alors la charge centrale de cette théorie, qui conduit à l'algèbre de Virasoro et à ses liens avec la décomposition en modes des champs position.

Nous reprenons largement [2], §2.

2.1 Cordes et bosons libres sur le cylindre complexe

A. Feuillet d'univers euclidien

Les métriques sur le feuillet d'univers considérées au chapitre précédent sont minkowskiennes : elles ont une signature $(-1, 1)$. Néanmoins, il est souvent plus agréable de travailler avec une métrique euclidienne, et le passage de l'une à l'autre est facile. Nous utiliserons donc à partir de maintenant une métrique euclidienne pour le feuillet d'univers, et nous ne manquerons pas de souligner les changements avec une métrique minkowskienne quand ils apparaîtront.

Concrètement, le passage à une métrique euclidienne revient à faire le changement $\tau \rightarrow -i\tau$ dans les équations obtenues, qui est couramment appelé *rotation de Wick*.

B. Coordonnées complexes sur le cylindre

Nous allons travailler sur la corde fermée, le feuillet d'univers est donc un cylindre. Les coordonnées sur ce cylindre définies au chapitre précédent sont $(\tau, \sigma) \in \mathbb{R}^2$, avec la relation d'équivalence $\sigma \approx \sigma + 2\pi$. On introduit alors la coordonnée complexe $z \in \mathbb{C}$ et son conjugué \bar{z} :

$$z = \sigma + i\tau \quad \text{et} \quad \bar{z} = \sigma - i\tau. \quad (2.1)$$

On a les dérivées usuelles

$$\partial = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_\sigma - i\partial_\tau) \quad \text{et} \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma + i\partial_\tau). \quad (2.2)$$

On en déduit l'expression des composantes de la métrique et de son inverse

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2, \quad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (2.3)$$

Suivant les conventions de [2], on prendra

$$d^2z = 2d\sigma d\tau = 2d^2\sigma \quad (2.4)$$

l'expression $d^2\sigma$ étant utilisée dans les actions 1.2 et 1.4.

C. Action des cordes sur un feuillet plat

Dans ce chapitre, nous allons figer le feuillet d'univers pour n'étudier que les champs positions sur un feuillet plat. Nos résultats ne seront pas directement applicables à la théorie des cordes et nous verrons les modifications à leur apporter au chapitre suivant.

Une fois la métrique fixée à une métrique plate et avec ces notations, l'action de Polyakov 1.4 s'écrit

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (2.5)$$

On remarque que cette action décrit D bosons indépendants et libres sur un cylindre.

2.2 Quantification, opérateurs et symétries

A. Quantification par l'intégrale de chemin, opérateurs

Nous utilisons ici le formalisme de l'intégrale de chemin, détaillé dans [2], §A.

Fonction de partition

A partir de l'action 2.5, on introduit la fonction de partition définie par une intégrale de chemin :

$$Z = \int [dX] e^{-S[X]}. \quad (2.6)$$

Le signe « $-$ » et l'absence de i dans l'exponentielle sont dus au passage à une métrique euclidienne.

Opérateurs

La valeur moyenne d'une « fonctionnelle » des champs $\mathcal{F}[X]$ est définie par

$$\langle \mathcal{F}[X] \rangle = \int [dX] e^{-S[X]} \mathcal{F}[X]. \quad (2.7)$$

On aurait pu normaliser cette expression en ajoutant un facteur $\frac{1}{Z}$, mais ceci n'a aucune importance pour la suite.

Dans ce formalisme, les insertions dans l'intégrale de chemin sont des opérateurs. Il est possible d'insérer plusieurs fonctionnelles dans l'intégrale de chemin. Si une fonctionnelle donne une valeur moyenne nulle quelles que soient les insertions supplémentaires, on dit que l'opérateur correspondant est nul ; formellement :

$$\langle \mathcal{F}[X] \mathcal{G}[X] \rangle = 0 \quad \forall \mathcal{G}[X] \implies \hat{\mathcal{F}} = 0. \quad (2.8)$$

En fait, il y a une restriction sur les fonctionnelles $\mathcal{G}[X]$ à considérer : elles ne doivent pas être *localisées* au même endroit que $\mathcal{F}[X]$ (si celle-ci est localisée). Nous reviendrons bientôt sur la signification de la localisation.

B. Produits d'opérateurs

Opérateurs position

Le produit d'opérateurs $X^\mu(z, \bar{z})$ est fondamental : il fait apparaître les difficultés de définition des produits d'opérateurs et est utilisé pour construire les produits d'opérateurs contruits à partir d'opérateurs position. Il s'obtient en calculant l'intégrale d'une dérivée totale :

$$\begin{aligned} 0 &= \int [dX] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \left(e^{-S[X]} X^\nu(z', \bar{z}') \right) \\ &= \int [dX] e^{-S[X]} \left(\frac{1}{\pi\alpha'} \partial\bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') + \eta^{\mu\nu} \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \right) \\ &= \frac{1}{\pi\alpha'} \partial\bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle + \eta^{\mu\nu} \langle \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ce calcul fait apparaître la notion d'opérateur *local*. Nous allons voir que le produit d'opérateurs locaux diverge quand les points où sont localisés ces opérateurs se rapprochent. Il est clair qu'en insérant un autre opérateur sous la dérivée totale ne change rien au calcul à condition que cet opérateur ne soit pas localisé en (z, \bar{z}) ou (z', \bar{z}') . D'après 2.8, on a l'égalité opératorielle

$$\frac{1}{\pi\alpha'} \partial\bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') = -\eta^{\mu\nu} \delta(z - z', \bar{z} - \bar{z}'). \quad (2.10)$$

Le produit d'opérateurs $X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}')$ diverge donc pour $z' \rightarrow z$. On définit alors l'*ordre normal* de ce produit en lui retirant sa partie divergente :

$$: X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') := X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2 \quad (2.11)$$

où l'on a utilisé $\partial\bar{\partial} \ln |z|^2 = 2\pi\delta^2(z, \bar{z})$.

On remarque que la partie « normalisée » est harmonique ($\partial\bar{\partial} : X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') := 0$). Dans les calculs, on utilise souvent le fait que la dérivation commute avec la normalisation.

Généralisation

Ce qui précède peut se généraliser à n'importe quelle fonctionnelle des champs $\mathcal{F}[X]$:

$$: \mathcal{F}[X] := \exp \left(\frac{1}{2} \int d^2z d^2z' \frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z, \bar{z})} \frac{\delta}{\delta X_\mu(z', \bar{z}')} \right) \mathcal{F}[X]. \quad (2.12)$$

La « normalisation » consiste à prendre un couple d'opérateurs position, à le remplacer par sa valeur moyenne, à recommencer cette opération pour tous les couples et tous les nombres de couples avant de sommer tous les termes obtenus. Le terme en $\frac{1}{k!}$ présent dans le développement de l'exponentielle est compensé par les $k!$ ordres possibles pour prendre k couples.

Pour le produit de deux fonctionnelles, il ne faut retenir que les termes croisés entre les deux fonctionnelles :

$$: \mathcal{F}[X] :: \mathcal{G}[X] := \exp \left(- \int d^2z d^2z' \frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu_{\mathcal{F}}(z, \bar{z})} \frac{\delta}{\delta X_{\mathcal{G}\mu}(z', \bar{z}')} \right) : \mathcal{F}[X] \mathcal{G}[X] : . \quad (2.13)$$

Développement d'un produit d'opérateurs

Dans la littérature anglo-saxonne, il s'agit du fameux *operator product expansion (OPE)*.

Le développement d'un produit d'opérateurs consiste à écrire un produit d'opérateurs locaux comme somme d'opérateurs locaux situés au même point, en faisant clairement apparaître les termes divergents. Ceux-ci seront finalement les seuls à nous intéresser. Il s'agit simplement d'une réécriture, qui donne pour 2.11 :

$$\begin{aligned} X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(0, 0) &= -\frac{\alpha'}{2} \ln |z|^2 + : X^\mu X^\nu(0, 0) : \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(z^k : X^\nu \partial^k X^\mu(0, 0) : + \bar{z}^k : X^\nu \bar{\partial}^k X^\mu(0, 0) : \right) \\ &\sim -\frac{\alpha'}{2} \ln |z|^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

l'équivalence étant prise implicitement pour $z \rightarrow 0$, ce qui revient à ne retenir que la partie divergente.

C. Symétries

Théorème de Noether

Commençons par une étude classique. Partons de champs ϕ et de leur action $S[\phi]$, invariante sous la transformation infinitésimale, de paramètre ϵ , $\delta\phi(z) = \epsilon f(\phi(z))$. L'action n'est pas à priori invariante sous la transformation plus générale $\delta\phi(z) = \epsilon\rho(z)f(\phi(z))$, mais elle doit être proportionnelle aux variations de ρ :

$$\delta S[\phi] = \frac{\epsilon}{4\pi i} \int d^2z \left(j^z(z) \partial_z \rho(z) + \bar{j}^{\bar{z}}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \rho(\bar{z}) \right) = \frac{\epsilon}{2\pi i} \int d^2z \left(\tilde{j}(\bar{z}) \partial \rho(z) + \bar{j} \bar{\partial} \rho(z) \right). \quad (2.15)$$

Cette équation définit le courant $(j(z), \bar{j}(\bar{z}))$. Si $\rho(z)$ est à support compact, on peut intégrer par parties pour faire apparaître la divergence du courant :

$$\delta S[\phi] = \frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^2z \rho(z) \left(\bar{\partial} j(z) + \partial \bar{j}(\bar{z}) \right). \quad (2.16)$$

Il est maintenant facile de voir ce qui se passe dans l'intégrale de chemin. On a simplement $\delta(e^{-S}) = -\delta S e^{-S}$, et comme la variation vient d'une variation des champs, elle s'annule après intégration sur tous les chemins :

$$0 = \int [d\phi] \delta \left(e^{-S[\phi]} \right) = -\langle \delta S \rangle = -\frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^2z \rho(z) \langle \bar{\partial} j(z) + \partial \bar{j}(\bar{z}) \rangle. \quad (2.17)$$

Les arguments habituels permettent de conclure à l'égalité opératorielle

$$\bar{\partial} j(z) + \partial \bar{j}(\bar{z}) = 0 \quad (2.18)$$

signifiant que le courant est conservé. L'existence de ce courant et sa conservation constitue le théorème de Noether. Bien que les notations ne l'indiquent pas, le courant est associé à la transformation f , et il y a un courant conservé par symétrie.

Identité de Ward

L'identité de Ward s'intéresse à la variation d'un opérateur local sous la transformation de symétrie et cherche à l'écrire à l'aide du courant conservé. Considérons l'opérateur local $\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0)$. De $\delta(\mathcal{A}e^{-S}) = (\delta\mathcal{A})e^{-S} - \mathcal{A}\delta S e^{-S}$ on déduit immédiatement

$$\langle \delta\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) \rangle = \frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^2z \rho(z) \langle (\bar{\partial}j(z) + \partial\tilde{j}(\bar{z}))\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) \rangle. \quad (2.19)$$

Prenons pour $\rho(z)$ la fonction indicatrice d'un voisinage V de (z_0, \bar{z}_0) . En appliquant le théorème de la divergence écrit en coordonnées complexes, on obtient

$$\delta\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) = \frac{\epsilon}{2\pi} \oint_{\partial V} (jdz - \tilde{j}d\bar{z})\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0). \quad (2.20)$$

Dans le cas où les composantes du courant sont respectivement holomorphe et antiholomorphe, on peut utiliser la formule des résidus pour le développement du produit d'opérateurs qui donne

$$\delta\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) = i\epsilon \left(\text{Res}_{z_0}(j(z)\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0)) - \overline{\text{Res}_{\bar{z}_0}(\tilde{j}(\bar{z})\mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0))} \right). \quad (2.21)$$

Ces deux dernières égalités sont deux écritures de l'identité de Ward. La deuxième écriture montre l'importance des termes divergents dans les développements de produits d'opérateurs.

2.3 Transformations conformes

A. Tenseur énergie-impulsion

Définition, calcul

Le tenseur énergie-impulsion est défini pour une théorie invariante par translation, ce qui est le cas par exemple pour l'action 2.5. Il s'agit de calculer le courant associé à la translation $\delta z = \epsilon v$ ($v \in \mathbb{C}$), qui modifie les champs selon $\delta\phi = -\epsilon v\partial\phi - \epsilon\bar{v}\bar{\partial}\phi$. Calculons donc la variation de l'action 2.5 pour la transformation $\delta z = \epsilon\rho(z)v$, où $\rho(z)$ est une fonction réelle quelconque. On trouve

$$\delta S = \frac{\epsilon}{2\pi\alpha'} \int d^2z \rho(z) \left[\bar{\partial}(v\partial X^\mu\partial X_\mu) + \partial(\bar{v}\bar{\partial}X^\mu\bar{\partial}X_\mu) \right] \quad (2.22)$$

et par identification avec 2.16, on obtient les courants

$$j(z) = -\frac{i}{\alpha'} v\partial X^\mu\partial X_\mu \quad \text{et} \quad \tilde{j}(\bar{z}) = -\frac{i}{\alpha'} \bar{v}\bar{\partial}X^\mu\bar{\partial}X_\mu. \quad (2.23)$$

En écrivant $j = j_z$, $\tilde{j} = j_{\bar{z}}$, $v = v^z$ et $\bar{v} = v^{\bar{z}}$, il devient évident que le courant s'écrit $j = iTv$, où T est le tenseur énergie-impulsion donné par :

$$\begin{cases} T(z) = T_{zz}(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu\partial X_\mu : \\ \tilde{T}(\bar{z}) = T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial}X^\mu\bar{\partial}X_\mu : \\ T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Dans cette définition opératorielle, l'ordre normal a été utilisé pour définir le produit de deux opérateurs au même point.

Propriété fondamentale, transformations holomorphes

L'expression 2.24 du tenseur énergie-impulsion montre qu'il est de trace nulle.

La conservation du courant 2.18 implique

$$\bar{\partial}T(z) = \partial\tilde{T}(\bar{z}) = 0 \quad (2.25)$$

c'est-à-dire que T et \tilde{T} sont respectivement holomorphe et antiholomorphe. La symétrie est en fait beaucoup plus large que la symétrie par translation : on vérifie aisément que tous les courants de la forme suivante sont conservés

$$j(z) = iv(z)T(z) \quad \text{et} \quad \tilde{j}(\bar{z}) = i\bar{v}(\bar{z})\tilde{T}(\bar{z}) \quad (2.26)$$

pour v holomorphe. Ceci signifie que toutes les transformations de la forme $\delta z = \epsilon v(z)$ laissent l'action invariante : il s'agit de la forme infinitésimale des transformations holomorphes $z \rightarrow z' = f(z)$ (f holomorphe).

B. Transformations conformes

Définitions

Il existe une définition des transformations conformes en toute dimension, mais en dimension deux une *transformation conforme* est simplement une transformation holomorphe des coordonnées $z \rightarrow z' = f(z)$ pour f holomorphe. Une théorie est *conforme* si les transformations conformes laissent l'action invariante. C'est le cas de l'action 2.5.

On définit un *opérateur tensoriel* comme un opérateur qui se transforme « comme un tenseur » sous les transformations conformes :

$$\mathcal{A}'(z', \bar{z}') = (\partial f(z))^{-h} (\bar{\partial} \bar{f}(\bar{z}))^{-\tilde{h}} \mathcal{A}(z, \bar{z}) \quad (2.27)$$

où h et \tilde{h} sont par définition les *poinds conformes* de l'opérateur \mathcal{A} . L'expression pour une transformation infinitésimale nous sera utile par la suite : pour $\delta z = \epsilon v(z)$ on a

$$\delta \mathcal{A}(z, \bar{z}) = -\epsilon \left[h\partial v + v\partial + \tilde{h}\bar{\partial} \bar{v} + \bar{v}\bar{\partial} \right] \mathcal{A}(z, \bar{z}). \quad (2.28)$$

Certains opérateurs peuvent se transformer de cette manière seulement sous les transformations rigides $z \rightarrow z' = \zeta z$:

$$\mathcal{A}'(z', \bar{z}') = \zeta^{-h} \bar{\zeta}^{-\tilde{h}} \mathcal{A}(z, \bar{z}). \quad (2.29)$$

Transformation conforme et développement d'un produit d'opérateurs

Ecrivons le développement du produit d'opérateur $T(z)\mathcal{A}(0)$ sous sa forme la plus générale :

$$T(z)\mathcal{A}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \mathcal{A}^{(n)}(0). \quad (2.30)$$

En insérant ce développement et le développement de v en série entière autour de 0 dans l'identité de Ward 2.21 avec les courants 2.26, on obtient la variation de $\mathcal{A}(0)$ sous la transformation conforme infinitésimale caractérisée par v

$$\delta \mathcal{A}(0) = -\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\partial^n v(0) \mathcal{A}^{(n)}(0) + \bar{\partial}^n \bar{v}(0) \tilde{\mathcal{A}}^{(n)}(0) \right) \quad (2.31)$$

(la partie antiholomorphe se déduit directement de la partie holomorphe).

En identifiant ce résultat et 2.28, on obtient le développement du produit d'opérateurs du tenseur énergie-impulsion avec un opérateur tensoriel

$$T(z)\mathcal{A}(0) \sim \frac{h}{z^2}\mathcal{A}(0) + \frac{1}{z}\partial\mathcal{A}(0) \quad (2.32)$$

et on a la même chose pour le développement de $\tilde{T}(\bar{z})\mathcal{A}(0)$. Pour un opérateur qui se transforme selon 2.28 seulement pour les transformations rigides, c'est-à-dire pour lesquelles $\partial v(z) = 0$, on ne peut identifier que les deux premiers termes

$$T(z)\mathcal{A}(0) \sim \dots + \frac{h}{z^2}\mathcal{A}(0) + \frac{1}{z}\partial\mathcal{A}(0). \quad (2.33)$$

C. Charge centrale

Cas des bosons

Calculons maintenant le développement du produit d'opérateurs TT . Pour l'action bosonique 2.5, on a trouvé $T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu(z)\partial X_\mu(z) :$. Un calcul méticuleux donne

$$T(z)T(0) \sim \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0). \quad (2.34)$$

En raison de la présence de dérivées, il faut calculer $T(z)T(z')$ à l'aide de 2.13 puis prendre $z' = 0$. Des étapes intermédiaires sont données dans [2],§2 (p.40).

De ce calcul et de 2.32, on peut tirer les conclusions suivantes :

- le poids conforme du tenseur énergie-impulsion est $h = 2$, ce qui était prévisible à partir de l'expression de $T(z)$ à partir des champs X^μ , qui ont un poids conforme nul;
- la présence du terme en z^{-4} montre que le tenseur énergie-impulsion n'est pas un opérateur tensoriel. Il s'agit d'une *anomalie*, qui joue un rôle fondamental dans la quantification des cordes et nous y reviendrons au chapitre suivant.

La *charge centrale* c est définie par

$$T(z)T(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0). \quad (2.35)$$

Ici, $c = D$. Plus précisément, la contribution d'un boson à la charge centrale est $c_b = 1$ et la charge centrale est additive.

Il va de soi que l'on a exactement le même résultat pour la composante antiholomorphe \tilde{T} .

Cas de la théorie $\beta\gamma$

Nous utiliserons plus loin des champs β et γ , de poids conformes respectifs $(h_\beta, \tilde{h}_\beta) = (\lambda, 0)$ et $(h_\gamma, \tilde{h}_\gamma) = (1 - \lambda, 0)$, régis par l'action

$$S_{\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \beta \bar{\partial} \gamma. \quad (2.36)$$

On a alors

$$\beta(z)\gamma(z') \sim \frac{-1}{z-z'} \quad \text{et} \quad T = (1-\lambda) : (\partial\beta)\gamma : -\lambda : \beta\partial\gamma : . \quad (2.37)$$

La charge centrale de ce système vaut

$$c_{\beta\gamma} = 12\lambda^2 - 12\lambda + 2. \quad (2.38)$$

La composante antiholomorphe du tenseur énergie-impulsion est nulle, la charge centrale \tilde{c} qui lui est associée est nulle également. Il existe une théorie $\beta\gamma$ antiholomorphe, qui se déduit de la théorie holomorphe par $h_\beta \leftrightarrow \tilde{h}_\beta, \partial \leftrightarrow \bar{\partial}, \dots$

Cas de la théorie bc

La théorie bc est similaire à la théorie $\beta\gamma$ à ceci près que les champs b et c sont *anticommutants*. L'action est identique, le tenseur énergie-impulsion aussi et les produits deviennent

$$b(z)c(z') \sim \frac{1}{z-z'} \quad \text{et} \quad c(z)b(z') \sim \frac{1}{z-z'}. \quad (2.39)$$

La charge centrale à le signe opposé :

$$c_{bc} = -12\lambda^2 + 12\lambda - 2. \quad (2.40)$$

Les remarques faites concernant les composantes antiholomorphes et la théorie bc antiholomorphe sont encore valables.

Cas des fermions

Considérons la théorie bc avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Sa charge centrale est $c = 1$. On note alors

$$b = \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2) \quad \text{et} \quad c = \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2). \quad (2.41)$$

La réécriture de l'action montre que les champs ψ_1 et ψ_2 sont indépendants

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\psi_1 \bar{\partial}\psi_1 + \psi_2 \bar{\partial}\psi_2 \right) \quad (2.42)$$

chacun des deux champs portant donc une charge centrale $c_\psi = \frac{1}{2}$. Ces champs représentent des fermions et seront utilisés pour construire la supercorde.

2.4 Décomposition en modes, algèbre de Virasoro

A. Passage du cylindre complexe au plan complexe

On note maintenant $w = \sigma + i\tau$ la coordonnée complexe sur le cylindre que nous avons utilisée jusqu'à maintenant. On passe du cylindre complexe au plan complexe en introduisant la coordonnée

$$z = e^{-iw} = e^{-i\sigma + \tau}. \quad (2.43)$$

Avec cette nouvelle coordonnée, un déplacement temporel est un déplacement radial et il n'est plus nécessaire d'effectuer le quotient $w \approx w + 2\pi$. Le domaine de définition de tous les champs devient $\mathbb{C} - \{0\}$, l'origine correspondant à $\tau \rightarrow -\infty$.

B. Décomposition du tenseur énergie-impulsion

Changements de coordonnées pour le tenseur énergie-impulsion

Les équations 2.21, 2.26 et 2.35 indiquent comment se transforme le tenseur énergie-impulsion sous une transformation infinitésimale des coordonnées. Nous avons besoin de sa transformation pour un changement de coordonnées quelconque. Nous admettons que pour le changement de coordonnées $z \rightarrow z' = f(z)$, la transformation du tenseur énergie-impulsion est

$$(\partial f)^2 T'(z') = T(z) - \frac{c}{12} \left(\frac{2\partial^3 f \partial f - 3(\partial^2 f)^2}{2(\partial f)^2} \right) (z). \quad (2.44)$$

Dans notre cas, $f : w \mapsto e^{-iw}$, donc

$$-z^2 T_{zz}(z) = T_{ww}(w) - \frac{c}{24}. \quad (2.45)$$

Décomposition du tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion $T_{zz}(z)$ défini sur $\mathbb{C} - \{0\}$ est holomorphe, on peut donc le décomposer en série de Laurent :

$$T_{zz}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad \left(\text{et} \quad \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \right) \quad (2.46)$$

avec

$$L_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi iz} z^{n+2} T_{zz}(z) \quad (2.47)$$

où C est un contour encerclant l'origine dans le sens trigonométrique.

On a ainsi la décomposition sur le cylindre

$$T_{ww}(w) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_n e^{inw} + \frac{c}{24}. \quad (2.48)$$

Le champ de vecteurs $v = \partial_\tau$, qui génère les translations dans le temps, a pour coordonnées complexes $v^w = i$, $v^{\bar{w}} = -i$. Avec 2.26, on obtient les courants associés, $j(w) = -T(w)$ et $\tilde{j}(\bar{w}) = \tilde{T}(\bar{w})$. La charge associée à cette transformation est définie par l'intégrale du courant sur un tour du cylindre, il s'agit ici de l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j(w) dw - \tilde{j}(\bar{w}) d\bar{w} = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c + \tilde{c}}{24}. \quad (2.49)$$

C. Algèbre de Virasoro

On peut définir un commutateur pour les charges associées aux symétries. Ce commutateur est associé à l'ordre temporel (qui correspond dans le plan à l'ordre radial) des opérateurs. Pour les transformations conformes des coordonnées, ces charges s'expriment en fonction du tenseur énergie-impulsion. En insérant le développement 2.46 dans les commutateurs, on obtient une relation de commutation pour les opérateurs L_n

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n}. \quad (2.50)$$

L'ensemble de ces opérateurs forme ainsi l'*algèbre de Virasoro*. Le terme en δ_{m+n} est l'*extension centrale* de cette algèbre, qui apparaît aussi sans cette extension dans des calculs classiques.

Les calculs conduisant au commutateur ci-dessus sont, comme toujours, détaillés dans [2], §2.6. Le développement du produit d'opérateurs TT (valable dans tous les systèmes de coordonnées – cylindre et plan – par la symétrie conforme) y joue un rôle central. Le point important est que tous ces résultats découlent uniquement de l'action 2.5, elle-même déduite de l'action de Polyakov.

D. Lien avec les champs bosoniques

Dans le nouveau système de coordonnées et en tenant compte de la rotation de Wick effectuée pour passer en métrique euclidienne, le développement 1.16 pour une corde fermée devient

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \ln |z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n^\mu}{z^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} \right). \quad (2.51)$$

En posant $p^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu$, on obtient pour le tenseur énergie-impulsion

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha_{n\mu}}{\bar{z}^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z^{p+2}} \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} \alpha_q^\mu \alpha_{p-q\mu} \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Après identification avec le développement 2.46, on obtient

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \alpha_{m-n\mu}. \quad (2.53)$$

Il s'agit seulement ici d'une égalité entre scalaires, et non entre opérateurs. Nous verrons les conséquences du passage aux opérateurs lors de la quantification au chapitre suivant.

3

Quantification de la corde bosonique

La tentative de quantification canonique se révèle infructueuse. Des contraintes provenant de la nullité du tenseur énergie-impulsion doivent être imposées, à la main d'abord, par l'intégrale de chemin ensuite. Nous voyons ainsi la dimension dans laquelle vivent les cordes et les particules qu'elles engendrent.

3.1 Tentative de quantification canonique

Quand rien n'est indiqué, nous étudions la corde fermée. Nous donnerons ce qui change pour la corde ouverte le moment venu.

A. Opérateurs et relations de commutation

Plaçons nous dans la jauge où la métrique est donnée par 1.13. Le moment conjugué à X^μ est donc,

$$P_\mu(\tau, \sigma) = \frac{\delta S}{\delta(\partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma))} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X_\mu(\tau, \sigma). \quad (3.1)$$

Quand on quantifie ce système, $X^\mu(\tau, \sigma)$, $P^\mu(\tau, \sigma)$, x^μ , p^μ et les α_n^μ et $\tilde{\alpha}_n^\mu$ deviennent des opérateurs et on impose le commutateur canonique

$$[X^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.2)$$

les autres commutateurs étant nuls :

$$[X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma')] = 0 \quad \text{et} \quad [P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma')] = 0 \quad (3.3)$$

Ce commutateur peut aussi se déduire des crochets de Poisson, procédure décrite dans [3], §2.3-2.4.

De ces commutateurs, on peut déduire les commutateurs entre les « coefficients » du développement 1.16 de X^μ , en suivant des calculs détaillés dans [1], §12.2 :

$$\begin{aligned} [x^\mu, p^\nu] &= i\eta^{\mu\nu} \\ [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \\ [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] &= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \\ [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La condition de réalité 1.17 s'écrit

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger. \quad (3.5)$$

Il apparaît clairement que pour $n > 0$ les opérateurs α_{-n}^μ et $\tilde{\alpha}_n^\mu$ vont respectivement jouer le rôle d'opérateurs de création et d'annihilation.

B. Espace des états

Nous possédons des opérateurs de création et d'annihilation, construisons l'espace des états comme avec l'oscillateur harmonique. L'état fondamental est l'état annulé par les opérateurs d'annihilation ; de plus on peut le choisir état propre de p^μ , on le notera donc $|p^\mu\rangle$:

$$\alpha_n^\mu |p^\mu\rangle = 0 \quad \forall n > 0 \quad (3.6)$$

et on impose bien sûr la même chose pour les opérateurs $\tilde{\alpha}_{n>0}^\mu$.

Le spectre est ensuite obtenu en faisant agir des opérateurs création sur cet état fondamental. Les états suivants, donnés par les coefficients $(r_{m,\mu})$, $(s_{n,\nu})$ et p^ρ , forment une base de l'espace des états (il s'agit bien sûr d'un espace de Fock) :

$$\left(\prod_{m>0,\mu} (\alpha_{-m}^\mu)^{r_{m,\mu}} \right) \left(\prod_{n>0,\nu} (\tilde{\alpha}_{-n}^\nu)^{s_{n,\nu}} \right) |p^\rho\rangle. \quad (3.7)$$

C. Incohérences

Etats de norme au carré négative

L'incohérence la plus flagrante dans la construction précédente est la présence d'états de norme au carré négative. En effet, calculons la norme au carré de l'état $\alpha_{-1}^0 |p^\mu\rangle$ en utilisant le commutateur 3.4 et la définition 3.6,

$$\begin{aligned} \langle p^\mu | \alpha_1^0 \alpha_{-1}^0 | p^\mu \rangle &= \langle p^\mu | \alpha_{-1}^0 \alpha_1^0 + [\alpha_1^0, \alpha_{-1}^0] | p^\mu \rangle \\ &= 0 + \eta^{00} \langle p^\mu | p^\mu \rangle \\ &= -1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

La présence d'états de norme au carré négative montre que cette quantification canonique « naïve » n'est pas viable. Le problème vient de la signature de la métrique : pour une métrique euclidienne, on aurait été dans le cas de D bosons libres, dont la quantification canonique ne pose pas de problème.

Conditions physiques supplémentaires

Nous devons donc revoir notre méthode de quantification. Reprenons la méthode, défailante, que nous avons utilisée : nous avons fixé la métrique en utilisant l'invariance de jauge, puis nous avons quantifié les degrés de liberté restants. Chemin faisant, un « détail » nous a échappé : la variation possible de la métrique ne peut pas être oubliée lors de la quantification. Ceci sera pris en compte de deux manières différentes dans la suite de ce chapitre :

- la variation possible de la métrique implique l'annulation du tenseur énergie-impulsion (cf. 1.6) pour les solutions classiques. Pour rendre compte de cette éventuelle variation, l'annulation du tenseur énergie-impulsion doit être imposée comme une contrainte sur les états physiques.
- la fixation de la jauge fait apparaître un déterminant résiduel dans l'intégrale de chemin, qui peut être vu comme provenant de l'action de fantômes. Comme nous le verrons, ces derniers suppriment des degrés de liberté au système.

La première méthode est plus « manuelle » que la deuxième, mais est plus rapide et donne quelques résultats.

3.2 Nullité du tenseur énergie-impulsion et particules

A. Contrainte sur les états physiques

Expression en fonction des opérateurs de Virasoro

Nous n'allons pas imposer directement l'annulation du tenseur énergie-impulsion sur les états physiques (c'est-à-dire imposer $T|\psi\rangle = 0$), mais nous intéresser à l'action des opérateurs de Virasoro ((L_n) et (\tilde{L}_n) d'après 2.46) sur les états physiques.

Pour exprimer l'annulation du tenseur énergie-impulsion sur les états physiques, nous sommes tentés d'imposer $L_n|\psi\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout état physique $|\psi\rangle$. La présence du terme « central » dans la relation de commutation 2.50 interdit clairement d'imposer ces contraintes. Nous allons imposer les contraintes plus faibles suivantes, sur un état physique $|\psi\rangle$:

$$L_n|\psi\rangle = 0 \quad \forall n > 0 \quad \text{et} \quad L_0|\psi\rangle = A|\psi\rangle. \quad (3.9)$$

La contrainte reste ainsi imposée pour les valeurs moyennes pour $n \neq 0$, car $L_n^\dagger = L_{-n}$ comme nous le voyons au paragraphe suivant. De même, la présence de la constante éventuellement non nulle A est justifiée au paragraphe suivant. La même contrainte est imposée avec les opérateurs \tilde{L}_n avec la même constante A .

Décomposition des opérateurs de Virasoro

Ecrivons les opérateurs de Virasoro en fonction des opérateurs annihilation et création à partir de l'expression classique 2.53. Quand on quantifie un système, une ambiguïté peut apparaître dans la définition d'un produit d'opérateurs qui ne commutent pas. D'après 3.4, c'est le cas seulement pour L_0 . On le définit donc par

$$L_0 =: \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \alpha_{-n\mu} := \frac{1}{2} \alpha_0^\mu \alpha_{0\mu} + \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu} \quad (3.10)$$

et la constante A est introduite comme un « degré de liberté » dans la définition de cet opérateur.

Il est clair que $L_n^\dagger = L_{-n}$.

B. Conséquences : masse et correspondance des niveaux

Réécrivons l'opérateur L_0 sous une forme plus facile à interpréter. D'une part, utilisons $\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$ et la relation classique $p^\mu p_\mu = -m^2$, où m est par définition la masse de l'état d'excitation de la corde. D'autre part, posons

$$N = \sum_{n > 0} \alpha_{-n}^\mu \alpha_{n\mu}. \quad (3.11)$$

Il s'agit de l'opérateur de comptage des oscillateurs droits, ce qui apparaît clairement quand on l'applique à l'état 3.7 en utilisant les commutateurs. On définit de même l'opérateur de comptage des oscillateurs gauches \tilde{N} . Avec ces notations on a

$$L_0 = -\frac{\alpha'}{4} m^2 + N. \quad (3.12)$$

Avec la contrainte 3.9 on obtient la masse des états physiques en fonction de leurs niveaux d'excitation :

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(N - A) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} - A), \quad (3.13)$$

ce qui donne comme condition supplémentaire la correspondance des niveaux :

$$N = \tilde{N}. \quad (3.14)$$

3.3 Quantification par l'intégrale de chemin

A. Fixation de la métrique et fantômes de Faddeev-Popov

Fonction de partition

Définissons la fonction de partition associée à l'action de Polyakov 1.4 comme dans 2.6, après une rotation de Wick pour passer en métrique euclidienne :

$$Z = \int \frac{[dX dh]}{V_{\text{Diff} \times \text{Weyl}}} e^{-S[X,h]} \quad (3.15)$$

où $V_{\text{Diff} \times \text{Weyl}}$ le « volume du groupe de symétries » : on ne veut pas sommer deux fois deux configurations équivalentes.

Pour une étude complète, il faudrait utiliser une action plus générale que l'action de Polyakov dans la définition de la fonction de partition, notamment pour étudier les interactions entre cordes. La définition que nous utilisons ici est suffisante pour obtenir les premiers résultats concernant la fixation de la jauge.

Fantômes de Faddeev-Popov

Nous suivons la méthode donnée dans [4], §3.5 pour diviser par le volume des difféomorphismes. Comme nous avons vu que le groupe de symétries permettait de fixer, au moins localement, la métrique (des restrictions topologiques apparaissent lors du passage au global), diviser par le volume des symétries revient à peu près à fixer la métrique h et à ne plus intégrer dessus. Cependant, comme nous allons le voir, cela laisse un terme dans l'intégrale de chemin.

Un changement de coordonnées et une dilatation induisent le changement de la métrique

$$h'_{ab}(\sigma') = e^{2\omega(\sigma)} \frac{\partial \sigma^c}{\partial \sigma'^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \sigma'^b} h_{ab}(\sigma). \quad (3.16)$$

Pour une transformation infinitésimale $\delta \sigma^a = -\tilde{\zeta}^a$ et $\delta \omega = \frac{1}{2}\Omega$, le changement de la métrique est

$$\delta h_{ab} = \nabla_a \tilde{\zeta}_b + \nabla_b \tilde{\zeta}_a + \Omega h_{ab} = (P\tilde{\zeta})_{ab} + \tilde{\Omega} h_{ab} \quad (3.17)$$

où $(P\tilde{\zeta})_{ab} = \nabla_a \tilde{\zeta}_b + \nabla_b \tilde{\zeta}_a - (\nabla_c \tilde{\zeta}^c) h_{ab}$ et $\tilde{\Omega} = \Omega + \nabla_c \tilde{\zeta}^c$. On a ainsi dans l'intégrale de chemin, autour de l'identité,

$$[dh] = [d(P\tilde{\zeta})d\tilde{\Omega}] = [d\tilde{\zeta}d\Omega] \left| \det \begin{pmatrix} P & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = [d\tilde{\zeta}d\Omega] \sqrt{|\det(PP^+)|}. \quad (3.18)$$

Le volume de la jauge est alors exactement $V_{\text{Diff} \times \text{Weyl}} = \int [d\zeta d\Omega]$. Utilisons la méthode de Faddeev-Popov : exprimons $\sqrt{|\det(P P^\dagger)|}$ en utilisant une intégrale de chemin gaussienne avec des champs anticommutants, comme décrit dans [2], §A et §3.3. Notons \hat{h}_{ab} la métrique (euclidienne) choisie, alors ce déterminant s'écrit

$$\sqrt{|\det(P P^\dagger)|} = \int [db dc] e^{-S_f} \quad \text{où} \quad S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{h}} b_{ab} (\hat{P}c)^{ab}. \quad (3.19)$$

En choisissant la métrique $\hat{h}_{ab} = \delta_{ab}$, comme b_{ab} peut être pris symétrique sans trace, on peut réécrire l'action

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma b_{ab} \partial^a c^b. \quad (3.20)$$

La fonction de partition s'écrit finalement

$$Z = \int [dX db dc] e^{-S - S_f}. \quad (3.21)$$

Une fois que la jauge a été fixée, tout ne se passe pas comme si la liberté dans la métrique n'avait jamais existé : elle se manifeste par la présence de nouveaux champs anticommutants, appelés *fantômes* (de Faddeev-Popov) car ils n'ont pas d'existence physique. Naturellement, S_f désigne l'action de ces fantômes.

Comme l'action des champs X^μ , l'action des fantômes peut se réécrire en coordonnées complexes. En utilisant les coordonnées complexes sur le cylindre introduites au chapitre précédent,

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c}) \quad (3.22)$$

où $b = b_{zz}$, $\bar{b} = b_{\bar{z}\bar{z}}$, $c = c^z$ et $\bar{c} = c^{\bar{z}}$. Le premier terme (en $b\bar{\partial}c$) concerne des champs anticommutants b et c de poids conformes respectifs $(2, 0)$ et $(-1, 0)$, étudiés au chapitre précédent (ici, $\lambda = 2$). D'après 2.40, leur charge centrale vaut

$$c_f = -26. \quad (3.23)$$

Le deuxième terme est complètement symétrique, les champs ont les poids conformes $(0, 2)$ et $(0, -1)$ et une charge centrale -26 .

B. Anomalie de Weyl et dimension critique

L'introduction des fantômes, porteurs d'une charge centrale de -26 , vont nous permettre de donner une dimension privilégiée pour l'étude des cordes. La conservation de l'invariance de Weyl lors de la quantification n'est pas automatique, et elle est équivalente à la nullité de la trace du tenseur énergie-impulsion. Comme expliqué dans [2], §3.4, l'annulation de cette trace correspond à l'annulation de la charge centrale totale. La suppression de l'anomalie de Weyl passe donc par l'annulation de la charge centrale.

Il y a une autre raison, beaucoup plus simple, de demander l'annulation de la charge centrale totale : la tensorialité du « tenseur » énergie-impulsion. En effet, le terme contenant la charge centrale dans le développement du produit d'opérateurs TT est responsable du fait que le tenseur énergie-impulsion ne se transforme pas comme un tenseur : il s'agit d'une anomalie. Il est alors raisonnable de demander l'annulation de cette anomalie, donc l'annulation de la charge centrale totale :

$$0 = c_b + c_f = D - 26. \quad (3.24)$$

L'annulation de la charge centrale fixe donc à 26 la dimension de l'espace dans lequel les cordes doivent évoluer. Cette dimension est la *dimension critique*, et nous nous placerons dans la suite à $D = 26$.

3.4 Fonction de partition sur le tore

A. Signification physique

En théorie quantique des champs, nous sommes habitués à calculer des « corrections à une boucle » pour la propagation d'une particule ou l'interaction de plusieurs particules. En théorie des cordes, les boucles deviennent des tores. La présence de la métrique dans l'intégrale de chemin désigne une intégration sur tous les types de surfaces, et nous allons ici nous restreindre au tore.

Dans la section précédente, nous avons évoqué des restrictions qui pouvaient exister lorsque l'on essaie de fixer la métrique. La formule de Gauss-Bonnet, selon laquelle l'intégrale de la courbure scalaire sur une surface de dimension deux est proportionnelle à la caractéristique d'Euler (donnée par le nombre de trous dans cette surface), montre que la métrique ne peut pas toujours être fixée. Cela signifie que, sur une surface donnée, il existe des métriques qui ne sont pas reliées par une transformation conforme ou une dilatation.

Dans le cas du tore, plusieurs métriques définies sur celui-ci seront inéquivalentes, et il faudra inclure l'intégrale sur ces métriques dans le calcul de la fonction de partition.

Nous allons donc paramétrer les tores, puis calculer la fonction de partition pour chaque tore avant de sommer sur tous les tores inéquivalents.

B. Description des tores

Un tore est défini comme le quotient de \mathbb{C} par un réseau $\Omega = z_1\mathbb{Z} + z_2\mathbb{Z}$ (avec (z_1, z_2) non \mathbb{R} -colinéaires). On quotiente l'ensemble des réseaux par la relation d'homothétie $(z_1, z_2) \sim (\lambda z_1, \lambda z_2)$. Ainsi (z_1, z_2) et $(1, \frac{z_2}{z_1})$ définissent le même tore, et un tore T est caractérisé par son *module* $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. τ et $-\tau$ définissant le même réseau, on se limitera à des modules de partie imaginaire positive. On note $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $\tau_1 \in \mathbb{R}$, $\tau_2 \in \mathbb{R}_+$.

Tous les modules ne définissent pas des tores différents, on a les deux symétries suivantes :

- $\tau \rightarrow \tau + 1 : \mathbb{Z} + (\tau + 1)\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$,
- $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} : \text{les réseaux définis par } \tau \text{ et } -\frac{1}{\tau} \text{ sont homothétiques, ils définissent donc le même tore.}$

On admettra que seules ces transformations et leurs composées

$$\tau \rightarrow \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \quad (3.25)$$

laissent le tore invariant.

Après avoir retiré toutes ces redondances, nous n'avons que des tores différents, en utilisant le résultat suivant : deux tores sont reliés par un difféomorphisme holomorphe si et seulement si ils sont homothétiques. Il nous faut déterminer une *région fondamentale*,

c'est-à-dire un sous-ensemble des complexes de partie imaginaire positive contenant un seul exemplaire de chaque tore, on trouve facilement, par exemple,

$$F_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0, -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1 \right\}. \quad (3.26)$$

C. Fonctions de partition pour un seul tore

La fonction de partition sur le tore de module τ vaut par définition

$$Z(\tau) = \int_{T(\tau)} [dX db dc] e^{-S-S_f} = Z_b(\tau) Z_f(\tau) \quad (3.27)$$

où $Z_b(\tau) = \int_{T(\tau)} [dX] e^{-S}$ et $Z_f(\tau) = \int_{T(\tau)} [db dc] e^{-S_f}$.

Fonction de partition des bosons

Intéressons nous au calcul de la fonction de partition des bosons

$$Z_b(\tau) = \int_{T(\tau)} [dX] e^{-S}. \quad (3.28)$$

L'intégrale de chemin a été introduite pour décrire l'évolution d'un système entre deux états donnés (cf. [2], §A). Si le système évoluant est une fonction sur le cercle et que l'on impose des états initiaux et finaux identiques, on se retrouve bien en présence d'un tore. On sommant sur l'« état initial », on obtient d'un part une trace et d'autre part une intégrale de chemin sur le tore.

L'état doit être le même après avoir évolué de τ . On peut alors utiliser l'opérateur d'évolution dans le temps 2.49 et celui d'évolution selon σ , $P = L_0 - \tilde{L}_0$:

$$\text{Tr} \left(e^{2\pi i \tau_1 P - 2\pi \tau_2 H} \right) = \int de \langle e | e^{2\pi i \tau_1 P - 2\pi \tau_2 H} | e \rangle = \int_{T(\tau)} [dX] e^{-S}. \quad (3.29)$$

En posant $q = e^{2\pi i \tau}$, on obtient pour la fonction de partition des bosons,

$$Z_b(\tau) = (q\bar{q})^{-\frac{D}{24}} \text{Tr} \left(q^{L_0} \bar{q}^{\tilde{L}_0} \right). \quad (3.30)$$

Cette trace qui s'exprime facilement avec la base 3.7 :

$$\begin{aligned} Z_b(\tau) &= V(q\bar{q})^{-\frac{D}{24}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\pi \alpha' \tau_2 p^2} \sum_{r,s} \left(\prod_{m,\mu} q^{mr_{m,\mu}} \prod_{n,\nu} \bar{q}^{ns_{n,\nu}} \right) \\ &= iV(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-\frac{D}{2}} (q\bar{q})^{-\frac{D}{24}} \left(\prod_{m,\mu} \sum_{r=0}^{+\infty} q^{mr} \right) \left(\prod_{n,\nu} \sum_{s=0}^{+\infty} \bar{q}^{ns} \right) \\ &= iV(4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-\frac{D}{2}} |\eta(\tau)|^{-2D} \end{aligned} \quad (3.31)$$

où $\eta(\tau)$ est la fonction de Dedekind

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (3.32)$$

et les termes i , V , sont justifiés dans [2], §7.2.

Fonction de partition des fantômes

Le principe est le même pour la fonction de partition des fantômes, à quelques subtilités près. Ces subtilités sont détaillées dans [2], §7.2, et nous ne les détaillerons pas. Elles viennent principalement de l'anticommutativité des champs b et c et de l'apparition d'une constante -1 dans L_0 obtenue dans [2], §2.7. Le résultat est

$$Z_f(\tau) = \text{Tr} \left((-1)^F c_0 b_0 \tilde{c}_0 \tilde{b}_0 e^{2\pi i \tau_1 P - 2\pi \tau_2 H} \right) = |\eta(\tau)|^4 \quad (3.33)$$

où F est l'opérateur de comptage du nombre de fermions et $c_0 b_0 \tilde{c}_0 \tilde{b}_0$ est l'opérateur de projection sur un des quatre états fondamentaux du système $bc\tilde{b}\tilde{c}$.

D. Fonction de partition globale, suppression de degrés de liberté

Déterminons maintenant la fonction de partition totale : il s'agit d'intégrer $Z_b(\tau)Z_f(\tau)$. Un point délicat est la détermination de la métrique à utiliser. On peut prendre simplement $d^2\tau$, en le divisant par le volume symétries conformes non fixées par le choix de la métrique : il s'agit ici des translations, dont le volume est l'aire du tore, τ_2 . Notre élément d'intégration sera donc $\frac{d^2\tau}{\tau_2}$ (dans les ouvrages donnés en références, un facteur $\frac{1}{4}$ est présent en plus, dont nous ne nous préoccupons pas ici).

On a alors pour la fonction de partition sur tous les tores :

$$Z_T = iV(4\pi\alpha')^{-\frac{D}{2}} \int_{F_0} \frac{d^2\tau}{\tau_2} \tau_2^{-\frac{D}{2}} |\eta(\tau)|^{-2(D-2)} \quad (3.34)$$

Il faut vérifier que le terme intégré est invariant sous les transformations modulaires : l'intégrale ne doit pas dépendre de la région fondamentale choisie. Les transformations de la fonction de Dedekind,

$$\begin{aligned} \eta(\tau + 1) &= e^{i\frac{\pi}{12}} \eta(\tau), \\ \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau} \eta(\tau) \end{aligned} \quad (3.35)$$

permettent de montrer facilement que c'est le cas.

D'après l'expression 3.30 de la fonction de partition des bosons, on s'aperçoit qu'en développant en puissances de q , on obtient le nombre d'états en fonction de leur niveau d'excitation. En y regardant de plus près, on s'aperçoit que c'est la puissance de $|\eta(\tau)|$ qui compte le nombre de degrés de liberté (cf. 3.31). Dans l'expression ci-dessus, il est clair que le terme dû aux fantômes supprime deux degrés de liberté.

3.5 Spectre de la corde bosonique

Le principe de la théorie des cordes est de décrire les particules par des états d'excitations de cordes, l'objectif étant notamment de réduire le nombre d'objets fondamentaux. Théoriquement, une particule est une représentation irréductible du groupe de Poincaré (produit semi-direct des transformations de Lorentz et des translations), on s'attend donc à pouvoir regrouper des états d'excitation en orbites sous l'action du groupe de Poincaré, engendrant ainsi des représentations irréductibles. Bien sûr, la masse d'un état d'excitation devra correspondre à la masse de la représentation que son orbite engendre.

A. Spectre de la corde fermée

Pour une impulsion p^μ fixée, l'état fondamental est $|p^\mu\rangle$, et sa masse au carré vaut $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}A$ d'après 3.13. Cet état correspond à une particule de spin zéro (ou particule scalaire), et sa masse est arbitraire. Il est par définition annulé par tous les opérateurs d'annihilation.

D'après la correspondance des niveaux 3.14, le premier état excité est de la forme

$$t_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu\tilde{\alpha}_{-1}^\nu|p^\rho\rangle, \quad (3.36)$$

t étant un tenseur quelconque. Sa masse au carré vaut $m^2 = \frac{4}{\alpha'}(1 - A)$.

Les fantômes supprimant concrètement deux degrés de liberté, il y a en fait $D - 2$ degrés de liberté pour les opérateurs création α_{-1}^μ . Or le sous-groupe d'isotropie est $SO(D - 1)$ pour une particule massive, et $SO(D - 2)$ pour une particule de masse nulle. Nous sommes donc dans le cas d'une particule de masse nulle, ce qui fixe la valeur de la constante de réordonnement

$$A = 1. \quad (3.37)$$

On peut ensuite extraire trois « particules » de ce premier état excité, ce qui revient à décomposer l'espace des tenseurs de rang deux en sous-espaces stables sous l'action du groupe de Poincaré :

- si $t_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, il s'agit d'une particule scalaire,
- si $t_{\mu\nu}$ est symétrique, sans trace, il s'agit d'une particule de spin 2 et de masse nulle : c'est le graviton !
- si $t_{\mu\nu}$ est antisymétrique, il s'agit d'un champ antisymétrique, dont le spin dépend de la dimension de l'espace.

La valeur de la constante de réordonnement donne la masse de l'état fondamental : $m^2 = -\frac{4}{\alpha'} < 0$! Il s'agit du *tachyon*, dont la présence n'est pas souhaitable. Le tachyon, présent dans toute théorie bosonique, justifie l'introduction des supercordes, que nous verrons au chapitre suivant.

La présence d'une particule de masse au carré négative signifie que le vide de la théorie n'est pas stable. Comme la théorie que nous écrivons est seulement perturbative¹, l'instabilité indique que nous essayons de la développer autour d'un maximum local (alors qu'il faudrait un minimum).

B. Spectre de la corde ouverte

Le spectre de la corde ouverte est l'analogue de celui de la corde fermée. Pour la corde ouverte, $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$, donc la masse est donnée par

$$m_{\text{co}}^2 = \frac{1}{\alpha'}(N - 1). \quad (3.38)$$

L'état fondamental est $|p^\mu\rangle$, et sa masse au carré vaut $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$; il s'agit d'un autre tachyon.

¹Sa version non perturbative serait l'analogue de la théorie quantique des champs pour les particules ponctuelles : un état devrait pouvoir contenir un nombre quelconque de cordes, et non une seule comme ici.

3. Quantification de la corde bosonique

Le premier état excité est de la forme $t_{\mu} \alpha_{-1}^{\mu} |p^{\nu}\rangle$ et est de masse nulle. Il représente une particule vectorielle (de spin 1). Naturellement, sa masse nulle correspond bien à ses $D - 2$ degrés de liberté.

4

La supercorde

Pour résoudre les problèmes de la corde bosonique, nous introduisons la supercorde par son action, contenant des champs fermioniques. Nous étudions ces symétries, son spectre, puis montrons comment celui-ci peut être tronqué en respectant certaines conditions. Ceci nous permet d'aboutir à une théorie sans tachyon qui engendre des fermions.

4.1 Action et symétries

A. Manques de la corde bosonique

La corde bosonique a deux problèmes majeurs :

- elle contient un tachyon, ce qui rend cette théorie perturbative instable,
- elle n'engendre pas de fermion d'espace-temps : les particules présentes dans son spectre sont toujours des bosons.

Nous allons chercher à résoudre le deuxième problème directement, la solution du premier viendra alors (presque) naturellement.

B. Action de la supercorde

Pour engendrer des fermions d'espace-temps, la modification la plus immédiate que l'on puisse apporter est l'introduction de fermions sur le feuillet d'univers, c'est-à-dire directement dans l'action. Plaçons nous dans le cadre conforme, et ajoutons à l'action 2.5 des champs anticommutants ψ^μ et $\tilde{\psi}^\mu$,

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right). \quad (4.1)$$

Les champs ψ^μ et $\tilde{\psi}^\mu$ ont des poids conformes respectifs $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \frac{1}{2})$.

C. Symétries

Symétrie conforme et tenseur énergie-impulsion

L'action 4.1 possède la symétrie conforme par construction. Les champs supplémentaires vont ajouter des termes au tenseur énergie-impulsion 2.24, renommé pour l'occa-

sion T_B pour son caractère commutant :

$$\begin{cases} T_B(z) &= -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu, \\ \tilde{T}_B(\bar{z}) &= -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu \end{cases} \quad (4.2)$$

A partir de maintenant l'ordre normal $::$ sera implicite lorsqu'il est nécessaire.

Symétrie superconforme

On vérifie aisément que l'action 4.1 est invariante sous les *transformations superconformes*

$$\begin{cases} \delta X^\mu(z, \bar{z}) &= -\epsilon \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\eta(z) \psi^\mu(z) + \overline{\eta(z)} \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \right), \\ \delta \psi^\mu(z) &= \epsilon \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \eta(z) X^\mu(z), \\ \delta \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) &= \epsilon \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \overline{\eta(z)} \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \end{cases} \quad (4.3)$$

pour η holomorphe ou antiholomorphe, anticommutant.

En procédant de même que pour le tenseur énergie-impulsion, on trouve les supercourants associés,

$$j^\eta(z) = \eta(z) T_F(z) \quad \text{et} \quad \tilde{j}^\eta(\bar{z}) = \overline{\eta(z)} \tilde{T}_F(\bar{z}) \quad (4.4)$$

avec

$$T_F(z) = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\mu \partial X_\mu \quad \text{et} \quad \tilde{T}_F(\bar{z}) = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (4.5)$$

l'indice F du tenseur se référant à l'anticommutativité de celui-ci.

Ces transformations « mélangent » les bosons et les fermions sur le feuillet d'univers, et nous rappellent les transformations de *supersymétrie*. Ceci justifie l'omniprésence du préfixe *super* dans ce chapitre. Sans rentrer dans les détails, disons simplement que la théorie résultant dans l'espace-temps sera supersymétrique.

D. Fantômes et dimension critique

Afin d'être plus directs, procédons simplement par analogie avec la corde bosonique. La fixation de la métrique va faire apparaître, en plus des fantômes bc anticommutants, des fantômes $\beta\gamma$ commutants, de poids respectifs $(\frac{3}{2}, 0)$ et $(-\frac{1}{2}, 0)$ (pour la partie gauche, la partie droite étant symétrique).

Encore une fois, nous allons demander que la charge centrale totale soit nulle. Nous avons les contributions suivantes (pour la partie holomorphe seulement) :

- la matière bosonique X^μ , chaque boson ayant une charge centrale de 1, la charge des bosons vaut D ,
- la matière fermionique ψ^μ , qui contribue avec $D \times \frac{1}{2}$ d'après l'étude des fermions en théorie conforme,
- les fantômes anticommutants, qui apportent une charge centrale de -26 ,
- les fantômes commutants, qui ont une charge centrale de 11.

La nullité de la charge centrale totale, $0 = D + \frac{D}{2} - 26 + 11$, donne la dimension critique pour la supercorde :

$$D = 10. \quad (4.6)$$

Nous admettrons que, comme dans le cas de la corde bosonique, tout se passe comme si les fantômes supprimaient deux degrés de liberté. Dès que le nombre de champs X^μ ou ψ^μ indépendants apparaîtra, nous prendrons celui-ci égal à huit.

4.2 Spectre de la supercorde

La partie bosonique de la supercorde est inchangée : le développement de X^μ est le même, ce qui donne les mêmes opérateurs α_m^μ , donc le même spectre. Nous nous focalisons ici sur la partie fermionique.

A. Périodicité et modes

Conditions aux limites

Nous appelons w la coordonnée complexe sur le cylindre, réservant z pour le plan complexe. Il existe des conditions de périodicité possibles pour les champs fermioniques ψ^μ :

$$\begin{aligned} \text{Ramond (R)} : \quad & \psi^\mu(w + 2\pi) = +\psi^\mu(w), \\ \text{Neveu-Schwarz (NS)} : \quad & \psi^\mu(w + 2\pi) = -\psi^\mu(w). \end{aligned}$$

On a la même liberté de choix pour $\tilde{\psi}^\mu$. On introduit ν et $\tilde{\nu}$ tels que

$$\psi^\mu(w + 2\pi) = e^{2\pi i\nu} \psi^\mu(w) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^\mu(w + 2\pi) = e^{-2\pi i\tilde{\nu}} \tilde{\psi}^\mu(w) \quad (4.7)$$

avec $\nu, \tilde{\nu} = 0$ pour des conditions de Ramond, $\nu, \tilde{\nu} = \frac{1}{2}$ pour des conditions de Neveu-Schwarz. Selon les conditions choisies à gauche et à droite, on parlera de *secteur* de Ramond ou de Neveu-Schwarz.

Décomposition en modes

Suivons [2], §10.2 et ce que nous avons fait pour la corde bosonique pour déterminer les opérateurs. Le développement en modes est

$$\psi^\mu(w) = i^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \psi_r^\mu e^{irw} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{w}) = i^{\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\nu}} \tilde{\psi}_r^\mu e^{-ir\bar{w}}. \quad (4.8)$$

Avec la coordonnée $z = e^{-iw}$ sur le plan complexe, et d'après le poids conforme des champs ψ^μ et $\tilde{\psi}^\mu$, cela donne le développement suivant dans le plan complexe,

$$\psi^\mu(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\psi_r^\mu}{z^{r + \frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\nu}} \frac{\tilde{\psi}_r^\mu}{\bar{z}^{r + \frac{1}{2}}}. \quad (4.9)$$

B. Opérateurs et (anti)commutateurs

Commutateurs et développement des tenseurs

Introduisons les relations d'anticommutation canoniques (qui peuvent aussi se déduire des développement en produit d'opérateurs) : pour les anticommutateurs non nuls,

$$\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \{\tilde{\psi}_r^\mu, \tilde{\psi}_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s}. \quad (4.10)$$

Les opérateurs ψ_r^μ sont des opérateurs de création (si $r < 0$) ou d'annihilation (si $r > 0$).

Les opérateurs de Virasoro ont un terme supplémentaire, qui se calcule facilement en tenant compte de l'anticommutativité des champs fermioniques et en insérant l'ordre normal pour les opérateurs de création-annihilation :

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_n^\mu \alpha_{m-n_\mu} : + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} (2r - m) : \psi_r^\mu \psi_{m-r_\mu} : \quad (4.11)$$

la partie antiholomorphe étant identique. Explicitons plus précisément L_0 , qui nous donnera la masse des états d'excitation. On trouve immédiatement

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^\mu \alpha_{0_\mu} + N_b + N_f, \quad (4.12)$$

où

$$N_f = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu, r > 0} r \psi_{-r}^\mu \psi_{r_\mu} \quad (4.13)$$

est le compteur du nombre d'excitations fermioniques.

Le tenseur T_F , de poids conforme $(\frac{3}{2}, 0)$, se développe de la manière suivante,

$$T_F(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{G_r}{z^{r + \frac{3}{2}}} \quad (4.14)$$

et les coefficients valent

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \psi_{r-n_\mu}. \quad (4.15)$$

Conditions sur les états physiques

Imposons également la nullité classique du tenseur T_F , c'est-à-dire la contrainte suivante sur les états physiques, par analogie avec la condition 3.9,

$$G_r |\psi\rangle = 0 \quad \forall r \geq 0. \quad (4.16)$$

Pour la condition concernant les opérateurs de Virasoro, la valeur propre de L_0 dépend, comme nous allons le voir, du secteur choisi.

C. Spectre de la supercorde

Nous allons d'abord nous intéresser aux états d'excitation d'un seul côté, ce qui correspond plutôt à la corde ouverte, mais qui est facilement utilisable pour la corde fermée, comme nous le verrons ensuite. Comme annoncé plus haut, nous ne nous intéressons pas aux excitations bosoniques.

Secteur NS

Le secteur NS est le plus simple car il ne contient pas d'opérateur ψ_0^μ . L'état fondamental $|0\rangle_{\text{NS}}$ est donc l'état annulé par tous les opérateurs d'annihilation :

$$\psi_r^\mu |0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad \forall r > 0. \quad (4.17)$$

Le premier état excité est de la forme

$$t_\mu \psi_{-\frac{1}{2}}^\mu |0\rangle_{\text{NS}}. \quad (4.18)$$

Comme pour la corde bosonique, ces états forment une représentation vectorielle de masse nulle du groupe de Poincaré. Il s'agit d'un boson d'espace-temps, ce qui peut être surprenant : des fermions sur le feuillet d'univers peuvent engendrer des bosons d'espace-temps. Pour la corde ouverte par exemple, comme $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$, d'après 4.12,

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} - A \right) \quad (4.19)$$

et comme la masse doit être nulle, on obtient

$$A_{\text{NS}} = \frac{1}{2}. \quad (4.20)$$

La masse de l'état fondamental vaut $m^2 = -\frac{1}{2\alpha'} < 0$: il s'agit toujours du tachyon.

Secteur R

Dans le secteur R, les opérateurs ψ_0^μ engendrent plusieurs états fondamentaux et permettent de passer de l'un à l'autre. Ces opérateurs vérifient la relation d'anticommution 4.10, identique à celle vérifiée par les matrices γ^μ de Dirac, à un facteur 2

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.21)$$

L'état fondamental est donc une représentation de l'algèbre de Dirac, il s'agit d'une particule de spin demi-entier, un fermion. Nous avons donc réussi à engendrer des fermions d'espace-temps à partir de fermions sur le feuillet d'univers. Plus de détails sont donnés dans [2], §10.2, 10.5, B. Il y est montré que les états fondamentaux vérifient l'équation de Dirac pour une masse nulle. On obtient ainsi

$$A_{\text{R}} = 0. \quad (4.22)$$

Cette représentation, de dimension 32, est réductible en deux représentations irréductibles de dimension 16, qui sont des représentations de Weyl. Elles se distinguent par leur valeur propre pour l'opérateur $(-1)^F$, où F compte le nombre d'excitateurs fermioniques, défini en détail dans [2], §10.2.

On peut écrire plus généralement, quelque soit le secteur,

$$A = \nu. \quad (4.23)$$

Corde fermée

Le spectre de la corde fermée est obtenu en combinant deux spectres obtenus précédemment. Il y a donc quatre choix possibles : (NS,NS), (NS,R), (R,NS) ou (R,R). Comme les spins s'ajoutent, les secteurs (NS,NS) et (R,R) engendrent des bosons, et les secteurs (NS,R) et (R,NS) des fermions. Par exemple, le graviton est dans le secteur (NS,NS).

On obtient une relation analogue à la correspondance des niveaux, qui s'écrit ici

$$\frac{\alpha'}{4}m^2 = N - \nu = \tilde{N} - \tilde{\nu}. \quad (4.24)$$

4.3 Fonction de partition et choix des secteurs

Nous avons pour l'instant quatre secteurs possibles, dont trois contiennent un tachyon, seul le secteur (R,R) n'en contenant pas. En éliminant les secteurs contenant un tachyon, on perd du même coup les fermions d'espace-temps. Il paraît aussi un peu optimiste de pouvoir retirer seulement les tachyons des trois secteurs concernés.

On cherche à séparer ces différents secteurs en plusieurs parties, l'une contenant le tachyon et que l'on pourra « jeter », de manière cohérente. Le critère de cohérence que nous utiliserons est l'invariance modulaire de la fonction de partition sur le tore.

A. Projection GSO

Définition

Précisons la définition de l'opérateur de comptage du nombre de fermions, F . Nous retiendrons simplement que

$$(-1)^F |0\rangle_{\text{NS}} = -|0\rangle_{\text{NS}} \quad (4.25)$$

et $(-1)^F$ vaut 1 sur 16 des 32 états fondamentaux du secteur R, et -1 sur les autres. On a de plus la propriété évidente d'après son appellation,

$$\left\{ (-1)^F, \psi_r^\mu \right\} = 0. \quad (4.26)$$

La projection Gliozzi-Scherk-Olive (GSO) est la projection sur l'un ou l'autre des sous-espaces propres de $(-1)^F$, les projecteurs étant simplement $\frac{1 \pm (-1)^F}{2}$.

Nouveaux secteurs

La projection GSO « découpe » tous les secteurs en deux. Pour un côté, on aura maintenant quatre secteurs : NS+, NS-, R+ et R-. D'après 4.25, le tachyon se trouve dans le secteur NS-.

La séparation se fait d'une manière différente selon les secteurs. Pour le secteur NS, la valeur propre pour $(-1)^F$ dépend du niveau d'excitation : -1 pour l'état fondamental, 1 pour les premiers états excités, ... En revanche, pour le secteur R, la moitié des états fondamentaux ont la valeur propre 1 , l'autre moitié la valeur propre -1 , il en va donc de même pour les autres niveaux d'excitation.

Pour la corde fermée, il y a maintenant seize secteurs, sept contenant des tachyons.

B. Fonctions de partition sur le tore

Nous allons utiliser les calculs des fonctions de partition faits dans [5], §7.2-7.4, pour avoir les fonctions de partition des différents secteurs et leur appliquer le critère d'invariance modulaire.

Fonctions de partition des différents secteurs

Pour aider à la compréhension des calculs de [5], notons simplement qu'il s'agit de calculs de fonctions de partition sur le tore, avec des critères de périodicité ou d'antipériodicité. D'une part les secteurs R et NS ont des périodicités différentes, d'autre part le nombre de fermions intervient dans la fonction de partition par l'introduction de $(-1)^F$.

Les fonctions de partition des différents secteurs sont les suivantes

$$\begin{aligned}
 \text{NS-} : \quad q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_A \left(\frac{1 + (-1)^F}{2} q^{L_0} \right) &= \chi_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\eta}} + \sqrt{\frac{\vartheta_4}{\eta}} \right) \\
 \text{NS+} : \quad q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_A \left(\frac{1 - (-1)^F}{2} q^{L_0} \right) &= \chi_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\eta}} - \sqrt{\frac{\vartheta_4}{\eta}} \right) \\
 \text{R}\pm : \quad q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_P \left(\frac{1 \pm (-1)^F}{2} q^{L_0} \right) &= \chi_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\eta}}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Les traces portent sur des fonctions périodiques (P) ou antipériodiques (A), η est la fonction de Dedekind rencontrée plus haut et les fonctions ϑ sont précisément définies dans [2], §7.2, p.214. Ici, $\text{Tr}_P((-1)^F q^{L_0}) = 0$.

Pour les mêmes secteurs à droite, il faut prendre les conjugués de ces fonctions de partition. Ces calculs sont fait pour un seul fermion, mais comme il y en a en fait huit, il faut élever tous les termes à la puissance huit. Pour simplifier les notations, on pose $\alpha_i = \left(\frac{\vartheta_i}{\eta} \right)^4$.

Invariance modulaire et choix des secteurs

La fonction de partition pour un tore de module τ sera de la forme la plus générale

$$Z(\tau) = \sum_{i,j=2}^4 A_{ij} \alpha_i(\tau) \bar{\alpha}_j(\tau) = {}^t \alpha(\tau) A \bar{\alpha}(\tau). \tag{4.28}$$

La matrice A contient les informations sur les secteurs présents dans le spectre. Nous allons rechercher les matrices A telles que l'invariance modulaire soit respectée.

Donnons les transformations des fonctions α_i sous les transformations modulaires $T : \tau \rightarrow \tau + 1$ et $S : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$, d'après [2], §7.2 :

	T	S
α_2	$e^{i\frac{2\pi}{3}} \alpha_2$	α_4
α_3	$e^{-i\frac{\pi}{3}} \alpha_4$	α_3
α_4	$e^{-i\frac{\pi}{3}} \alpha_3$	α_2

Matriciellement, dans la base $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, en posant $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$,

$$T = \omega^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Sous la transformation modulaire M ($M = T$ ou S),

$$Z = {}^t\alpha A \bar{\alpha} \xrightarrow{M} Z' = {}^t\alpha^t M A \bar{M} \bar{\alpha}, \quad (4.30)$$

donc pour que la fonction de partition soit invariante sous les transformations modulaires, la matrice A doit vérifier

$${}^t T A \bar{T} = A \quad \text{et} \quad {}^t S A \bar{S} = A. \quad (4.31)$$

On trouve facilement que la matrice A doit être de la forme

$$A = aI_3 + b\mathcal{B} \quad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Avec huit fermions, les fonctions de partition des secteurs sont en fait

$$\begin{aligned} \text{NS-} : \quad & \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4) = \gamma_- \\ \text{NS+} : \quad & \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_4) = \gamma_+ \\ \text{R}\pm : \quad & -\frac{\alpha_2}{2} = \beta \end{aligned} \quad (4.33)$$

Le signe moins des secteurs R vient du fait que les amplitudes à une boucle des fermions doivent être comptées avec un signe moins, par des arguments de théorie des champs que nous ne développeront pas ici. Après quelques manipulations matricielles élémentaires, on trouve que la fonction de partition doit être de la forme

$$Z = a|\beta|^2 + \frac{a-b}{2}|\gamma_-|^2 + \frac{a+b}{2}|\gamma_+|^2 + b(\beta\bar{\gamma}_+ + \bar{\beta}\gamma_+). \quad (4.34)$$

Les secteurs présents se lisent aisément dans cette fonction de partition.

Cherchons une théorie sans tachyon. Celui-ci se trouve dans le secteur NS-, donc le coefficient de tous les termes contenant γ_- dans la fonction de partition doivent être nuls. Ici, il faut simplement prendre $a = b$, et comme les coefficients doivent être égaux à 1 si le secteur est présent, à 0 sinon, $a = b = 1$. Une théorie sans tachyon est nécessairement composée des secteurs suivants :

$$(\text{R}, \text{R}) \cup (\text{NS+}, \text{NS+}) \cup (\text{NS+}, \text{R}) \cup (\text{R}, \text{NS+}) \quad (4.35)$$

Nous n'avons pas imposé toutes les conditions qu'il était possible d'imposer sur les secteurs, et le résultat ci-dessus ne nous dit pas comment choisir entre les secteurs R+ et R-. En fait, les théories possibles sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{IIA} : \quad & (\text{R+}, \text{R-}) \cup (\text{NS+}, \text{NS+}) \cup (\text{NS+}, \text{R-}) \cup (\text{R+}, \text{NS+}) \\ \text{IIB} : \quad & (\text{R+}, \text{R+}) \cup (\text{NS+}, \text{NS+}) \cup (\text{NS+}, \text{R+}) \cup (\text{R+}, \text{NS+}) \end{aligned}$$

ainsi que celles obtenues en échangeant R_+ et R_- (IIA' et IIB'). Ces théories sont très satisfaisantes : elles ne contiennent pas de tachyon et engendrent des fermions d'espace-temps.

Comme autres théories possibles, on trouve les théories 0A et 0B, obtenues avec $a = 2$ et $b = 0$:

$$(R, R) \cup (R, R) \cup (NS_+, NS_+) \cup (NS_-, NS_-) \quad (4.36)$$

où les deux secteurs (R, R) sont différents. Ces théories contiennent un tachyon et pas de fermion, elles ne sont donc pas à priori très intéressantes.

Le même type d'analyse existe pour des cordes ouvertes, pour des cordes non-orientées, et pour des cordes construites différemment, comme la corde hétérotique.

C. Complément sur le spectre : les états (R, R)

Le secteur R a déjà été étudié rapidement, mais quelques propriétés intéressantes apparaissent lorsqu'il est couplé avec lui-même dans la corde fermée. Une analyse précise du spectre dans le secteur (R, R) est donnée dans [4], §7.2.1. Elle repose sur les propriétés des matrices γ^μ de Dirac et sur la manière de combiner deux spineurs (donnés par les deux secteurs R) en un champ bispinoriel.

Il en résulte que la théorie IIA contient des formes alternées de rang pair, qui dérivent de formes de potentiel de rang impair (sauf pour la 0-forme) et que la théorie IIB contient des formes alternées de rang impair qui dérivent de potentiels de rang pair.

5

De la compactification aux D-branes : vers le modèle standard

Nous considérons maintenant l'espace-temps comme le produit d'un espace plat par une fibre compacte. Dans le cas d'un cercle, nous voyons comment cela modifie le spectre et faisons apparaître la dualité T. La même dualité appliquée aux cordes ouvertes implique l'existence de branes de Dirichlet auxquelles ces cordes s'attachent. Nous tentons enfin d'approcher du modèle standard en représentant des fermions et des bosons de jauge avec des cordes.

5.1 Compactification de l'espace-temps et dualité T

Dans ce chapitre, nous allons « manipuler » l'espace-temps en lui donnant des formes particulières. Pour rendre ces formes intuitives, nous nous limiterons à des excitations bosoniques de la corde. En effet, les champs fermioniques ψ^μ sont à valeur dans un superspace trop complexe pour être utilisé ici. Les principaux phénomènes de base apparaissent déjà au niveau d'un espace bosonique classique.

A. Compactification (toroïdale)

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré l'espace-temps comme étant celui de Minkowski : \mathbb{R}^D muni de la métrique η . Nous allons ici modifier cet espace, en le considérant comme un fibré de base minkowskienne de dimension $D - q$ et de fibre compacte de dimension q . Afin de faciliter notre étude, nous prendrons la fibre la plus simple qui soit : le tore $T^q = (S^1)^q$. L'espace total sera donc

$$\mathbb{R}^{D-q} \times (S^1)^q . \tag{5.1}$$

Supposons que le temps court sur la base du fibré et prenons pour le tore une métrique euclidienne plate. Nous utiliserons les mêmes coordonnées que précédemment, prenant les q dernières dans $\mathbb{R}/(2\pi R_i \mathbb{Z})$ où R_i désigne le rayon de la dimension indexée par i .

B. Nouveau spectre pour les cordes fermées et dualité T

Nouveau spectre pour les cordes fermées

Nous allons nous limiter au cas d'une compactification de dimension 1, sur un cercle de rayon R . La compactification va modifier le spectre de deux façons.

Premièrement, l'opérateur de translation de la corde de $2\pi R$ le long du cercle doit être l'identité. Comme c'est l'impulsion p^{D-1} qui génère les translations, la condition $e^{2\pi i R p^{D-1}} = 1$ impose sa quantification :

$$p^{D-1} = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

Deuxièmement, la condition de périodicité $X^{D-1}(\sigma + 2\pi, \tau) = X^{D-1}(\sigma, \tau)$ devient, dans $\mathbb{R}/(2\pi R\mathbb{Z})$,

$$X^{D-1}(\sigma + 2\pi, \tau) = X^{D-1}(\sigma, \tau) + 2\pi R e \quad (5.3)$$

où e est le *nombre d'enroulements* : la corde fermée peut être enroulée autour de la fibre. Selon la $D - 1$ -ième coordonnée, l'état de la corde sera donné par les niveaux d'excitation et par les entiers n et e .

Avec la nouvelle condition de périodicité 5.3, le développement en modes 1.16 pour X^{D-1} doit être modifié en

$$X^{D-1}(\tau, \sigma) = x^{D-1} + \alpha' p^{D-1} \tau + R e \sigma + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^{D-1} e^{-in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{D-1} e^{-in(\tau+\sigma)} \right). \quad (5.4)$$

Si on calcule $\partial_\tau X^{D-1}$ et $\partial_\sigma X^{D-1}$, on s'aperçoit qu'il faut cette fois poser

$$\alpha_0^{D-1} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{n}{R} - \frac{R e}{\alpha'} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_0^{D-1} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(\frac{n}{R} + \frac{R e}{\alpha'} \right). \quad (5.5)$$

Ceci entraîne des modifications pour L_0 et \tilde{L}_0 .

Venons-en au point qui nous intéresse : la masse des nouvelles particules. Ceci soulève une question fondamentale : que voyons-nous ? Ou plutôt, que voulons-nous voir ? Il semble raisonnable de penser que nous ne voyons les cordes que « de loin » et que c'est pour cette raison elles nous apparaissent comme des particules (cette « hypothèse » justifie même l'introduction des cordes). Nous allons donc définir leur masse avec leur mouvement par rapport à la base, c'est-à-dire prendre $m^2 = -p^i p_i$, $0 \leq i \leq D - q - 1$. Il faut donc ajouter à la masse donnée en 3.13, le terme $p^k p_k$, $D - q - 1 \leq k \leq D - 1$. Dans notre cas d'une fibre de dimension 1,

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'} \left(\alpha_0^{D-1} \right)^2 + \frac{4}{\alpha'} (N - 1) = \frac{2}{\alpha'} \left(\tilde{\alpha}_0^{D-1} \right)^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - 1). \quad (5.6)$$

Avec les expressions 5.5, en faisant la moyenne des deux expressions de la masse, on obtient l'expression suivante

$$m^2 = \left(\frac{n}{R} \right)^2 + \left(\frac{R e}{\alpha'} \right)^2 + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2). \quad (5.7)$$

et la différence nous donne une nouvelle condition pour la correspondance des niveaux, qui remplace 3.14,

$$N - \tilde{N} = n e. \quad (5.8)$$

L'idée d'utiliser plus de dimensions que les dimensions perçues de l'espace-temps à quatre dimensions pour expliquer certains phénomènes est beaucoup plus vieille que la théorie des cordes. Elle remonte en fait à la théorie de Kaluza et Klein qui voulaient déduire l'électromagnétisme des équations d'Einstein écrites dans un espace de dimension 5, $\mathbb{R}^4 \times S^1$. Pour cette raison, les états enroulés des cordes sont appelés *états de Kaluza-Klein*.

Dualité T

Toujours dans le cas d'une fibre en cercle, il apparaît que le spectre de masses 5.7 est inchangé quand le rayon du cercle est changé en

$$R' = \frac{\alpha'}{R}. \quad (5.9)$$

Il suffit pour cela d'échanger le nombre d'enroulements et le « nombre » de moments

$$e' = n, \quad n' = e. \quad (5.10)$$

Il est possible de pousser plus loin cette comparaison, et il est aisé de montrer qu'il y a une bijection entre les états pour le rayon R et les états pour le rayon $\frac{\alpha'}{R}$. Ces deux « théories » (deux rayons différents donnent a priori deux théories différentes) sont donc *duales*, reliées par la *dualité T* (pour toroïdale). Le rayon $\frac{\alpha'}{R}$ est le rayon dual du rayon R . Le rayon autodual vaut $R_0 = \sqrt{\alpha'}$.

Une application de la dualité T entraîne les changements suivants pour les coefficients

$$\begin{aligned} \alpha_n^{D-1} &\xrightarrow{T} -\alpha_n^{D-1} \\ \tilde{\alpha}_n^{D-1} &\xrightarrow{T} \tilde{\alpha}_n^{D-1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Cela se montre facilement pour $n = 0$, et il paraît logique de l'étendre à tout n pour établir une bijection entre les états, la bonne expression de l'algèbre de Virasoro, ... C'est ainsi toute la partie droite du développement qui est changée en son opposée.

On obtient facilement à partir du changement des coefficients, la modification suivante de l'action des dérivées partielles sur les champs position

$$\partial_\tau \xleftrightarrow{T} \partial_\sigma. \quad (5.12)$$

5.2 Cordes ouvertes et branes de Dirichlet

A. Action de la dualité T sur les cordes ouvertes

Existence des branes de Dirichlet

Considérons une corde ouverte avec des conditions aux limites les plus naturelles, celles de Neumann. Pour voir l'action de la dualité T sur cette corde, utilisons le fait que les dérivées partielles soient interchangées, d'après 5.12. Il est clair que les conditions aux limites de Neumann se transforment en conditions aux limites de Dirichlet : les bouts de la corde deviennent fixes.

Comme nous l'avons dit au premier chapitre, des conditions aux limites de Dirichlet impliquent l'existence de branes auxquelles sont accrochées ces cordes, afin de préserver la conservation de l'impulsion. Ces branes sont les branes de Dirichlet ou D-branes.

Notons X' la position de la corde après application de la dualité T et utilisons $\partial_\tau X = \partial_\sigma X'$:

$$\begin{aligned}
 X'^{D-1}(\tau, \pi) - X'^{D-1}(\tau, 0) &= \int_0^\pi d\sigma \partial_\sigma X'^{D-1} \\
 &= \int_0^\pi d\sigma \partial_\tau X^{D-1} \\
 &= 2\pi\alpha' p^{D-1} \\
 &= 2\pi\alpha' \frac{n}{R} \\
 &= n \times 2\pi R'.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Les deux extrémités de la corde ouverte reposent donc sur la même brane. Géométriquement, cette brane est un hyperplan (d'équation $X'^{D-1} = \text{constante}$).

Nous sommes partis de cordes ouvertes avec conditions aux limites de Neumann, qui ne pouvaient pas être enroulées mais dont le moment était quantifié (selon la coordonnée $D - 1$). Après application de la dualité T, qui, comme nous l'avons vu pour les cordes fermées, échange les nombres d'enroulements et de moment, nous avons obtenu des cordes enroulées et dont le moment p^{D-1} est nul (ce qui est facile à vérifier). Les cordes ouvertes peuvent avoir un nombre d'enroulements à condition que leurs extrémités soient fixées dans la direction selon laquelle elles sont enroulées, ce qui est précisément le cas ici.

Pour les cordes fermées, la dualité apparaît immédiatement. La dualité T modifie le comportement des cordes ouvertes, il faut donc considérer les différents comportements (i.e. les différentes conditions aux limites) comme acceptables pour conserver cette dualité pour les cordes ouvertes.

Masse des cordes ouvertes

Le calcul de la masse des cordes ouvertes est extrêmement rapide et similaire à celui fait pour les cordes fermées. On obtient, pour des conditions aux limites de Neumann,

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N - 1) \tag{5.14}$$

ou, pour des conditions aux limites de Dirichlet,

$$m^2 = \left(\frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N - 1). \tag{5.15}$$

B. Charges de Chan-Paton

Définition

Il est possible d'attacher des « numéros » aux extrémités des cordes ouvertes. Nous choisirons pour ces numéros un nombre fini d'entiers : $1 \leq i, j \leq N$. Cette opération, un peu abstraite et arbitraire, se visualise facilement sur FIG. 5.1. Les numéros attachés aux extrémités sont appelés *charges de Chan-Paton* (ou facteurs de Chan-Paton).

Leur comportement est trivial : ils sont invariants sous les transformations de l'espace-temps et n'évoluent pas dans le temps. Il y a maintenant N^2 secteurs pour les

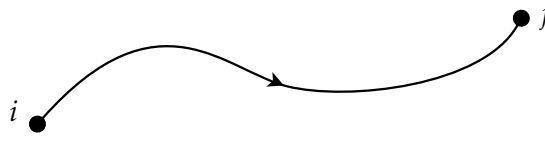


FIG. 5.1: Corde ouverte portant des charges de Chan-Paton

cordes ouvertes, et nous notons $|ij\rangle$ l'état fondamental portant la charge i en $\sigma = 0$ et j en $\sigma = \pi$. Il y a maintenant N^2 copies du spectre que nous connaissions pour la corde ouverte.

Nous n'avons pas développé les interactions entre cordes, mais nous pouvons simplement dire que les cordes ouvertes peuvent interagir en joignant une de leurs extrémités pour donner une d'autres cordes ouvertes. Des cordes ouvertes portant des charges de Chan-Paton ne peuvent interagir que par deux extrémités portant la même charge. Ceci fait partie de la définition des charges de Chan-Paton, et est une raison de leur intérêt.

Action de $U(N)$ sur les états et vecteurs de jauge

Regardons plus précisément l'espace vectoriel engendré par les états $|ij\rangle$, muni du produit hermitien vérifiant $\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Pour qu'un état

$$|a\rangle = \sum_{i,j=1}^N A_{ij}|ij\rangle \quad (5.16)$$

soit de norme 1, on doit clairement avoir

$$\text{Tr} \left(A^\dagger A \right) = \langle a|a\rangle = 1. \quad (5.17)$$

Le produit scalaire sur les états devient un produit scalaire sur les matrices. On remarque que l'action adjointe de $U(N)$ sur les matrices définissant les états induit une action unitaire sur les états :

$$U|a\rangle = \sum_{i,j=1}^N \left(UAU^\dagger \right)_{ij} |ij\rangle \quad (5.18)$$

pour $U \in U(N)$. En faisant le calcul, on voit aisément que U agit sur la première charge (celle située en $\sigma = 0$) et U^\dagger sur la deuxième.

Bien sûr, cette action de $U(N)$ laisse invariante les amplitudes de probabilité d'interaction.

Les premiers états excités donnent maintenant N^2 vecteurs, représentant le groupe de jauge $U(N)$. Cette construction est extrêmement importante, car elle fait apparaître un groupe de jauge non commutatif, essentiel pour décrire la physique que nous connaissons et plus particulièrement le modèle standard.

Plus précisément, si l'on considère les excitations des cordes ouvertes comme des particules vivant sur les branes, les premiers états excités donnent N^2 vecteurs d'un espace de dimension $D - 1$ avec les excitations parallèles à la brane (ce sont des représentations vectorielles pour le groupe de Poincaré sur la brane), et N^2 scalaires.

Interprétation en termes de D-branes

Les charges de Chan-Paton peuvent être interprétées en termes de branes. Pour cela, considérons, d'une façon extrêmement qualitative, les interactions entre cordes ouvertes portant des charges de Chan-Paton : deux extrémités peuvent se joindre si elles portent la même charge. Considérons maintenant des cordes ouvertes avec des conditions aux limites de Dirichlet en présence de N D-branes : leurs extrémités peuvent choisir la brane sur laquelle elles sont accrochées. De plus, il semble naturel de dire que deux extrémités peuvent se joindre si elles reposent sur la même D-brane. Nous en arrivons donc à la « conclusion » suivante : avec les charges de Chan-Paton, tout se passe comme si nous étions en présence de N D-branes avec la charge de Chan-Paton d'une extrémité indiquant à quelle D-brane elle est attachée.

Comme nous l'avons montré avec 5.13, une corde ouverte avec conditions aux limites de Dirichlet fait nécessairement un nombre entier de tours de la fibre. Ceci implique dans le cas de plusieurs branes qu'elles se superposent. Ce raisonnement est aussi valable avec des conditions aux limites de Neumann, il suffit de dire qu'il y a N D-branes qui remplissent tout l'espace et ne font qu'imposer des conditions sur les interactions. Là encore ces D-branes se superposent.

Lignes de Wilson

Partons de cordes ouvertes portant des charges de Chan-Paton, avec des conditions aux limites de Neumann. Introduisons maintenant des potentiels constants A_i agissant sur les extrémités des cordes portant les charges correspondantes (le potentiel A_i agit sur les extrémités portant la charge i). Ces potentiels modifient le moment vertical de la corde (le moment le long de la fibre) et ne peuvent être supprimés par une transformation de jauge, à cause de la topologie de la fibre.

Le « vrai » moment p_{ij}^{D-1} d'un état au-dessus de $|ij\rangle$ devient

$$\Pi_{ij}^{D-1} = p^{D-1} + (A_i - A_j) , \quad (5.19)$$

et c'est lui qui est quantifié :

$$\Pi_{ij}^{D-1} = \frac{n}{R} . \quad (5.20)$$

Cette expression contient (presque) tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour l'instant sur ces potentiels, aussi appelés *lignes de Wilson*.

Les calculs précédents doivent être modifiés : pour l'écart sur la fibre entre les deux extrémités, nous avons au lieu de 5.13,

$$X'^{D-1}(\tau, \pi) - X'^{D-1}(\tau, 0) = 2\pi R' n - 2\pi\alpha' (A_i - A_j) . \quad (5.21)$$

Ceci signifie clairement que les deux extrémités de la corde ne sont plus sur la même brane. Avec l'interprétation des charges en termes de D-branes, l'introduction de potentiels sépare les branes : elles ne sont plus superposées. Cela a bien sûr un effet sur les masses, on a maintenant, à partir de 5.14 ou 5.15,

$$m^2 = \left(\frac{n}{R} - (A_i - A_j) \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N-1) \quad \text{ou} \quad m^2 = \left(\frac{eR}{\alpha'} - (A_i - A_j) \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N-1) . \quad (5.22)$$

Si les branes i et j sont séparées, les vecteurs de jauge prennent une masse, et on assiste à une brisure de symétrie. Par exemple, si toutes les branes sont séparées, le groupe de jauge passe de $U(N)$ à $(U(1))^N$. Ce mécanisme de brisure de symétrie est également très important, car on le retrouve dans le modèle standard : c'est un mécanisme de ce type qui donne une masse aux bosons W^\pm et Z .

5.3 Quelques compléments

Nous allons apporter ici quelques compléments à ce que nous venons de voir. Nous avons étudiés les phénomènes élémentaires de manière assez détaillée et allons maintenant nous concentrer sur l'aspect qualitatif. Certains de ces compléments seront utiles pour donner un premier aperçu du modèle standard en théorie des cordes.

A. D'autres compactifications

Après avoir énoncé le principe général de la compactification, nous avons étudié le cas d'une compactification toroïdale avec une fibre de dimension 1. Il est clair que beaucoup de choses se jouent dans le choix de la fibre. Ce que nous avons fait se généralise facilement à toutes les compactifications toroïdales, où l'on prend pour l'espace-temps $\mathbb{R}^{D-q} \times (S^1)^q$, et où nous voyons les particules dans \mathbb{R}^{D-q} . La compactification toroïdale qui semble la plus intéressante correspond à $q = 6$, nous laissant avec un espace-temps « visible » à quatre dimensions.

Il est clair que beaucoup d'autres compactifications peuvent être envisagées. Celles donnant un espace-temps visible à quatre dimensions et une fibre de dimension six sont privilégiées. Parmi les fibres les plus étudiées citons les orbifolds et les variétés de Calabi-Yau.

Nous pouvons regarder « ce qui compte » dans la compactification toroïdale que nous avons effectuée. Pour les états enroulés par exemple, il est clair que le groupe fondamental joue un rôle ... fondamental. En effet, chaque état d'enroulement correspond à un élément du groupe fondamental de la fibre (le groupe des classes d'homotopie de lacets). La quantification du moment, l'existence de lignes de Wilson, semblent aussi liées au groupe fondamental. Pour aller plus loin, il est donc important de mettre la main sur les critères topologiques déterminants pour la théorie des cordes engendrée : groupe fondamental, classes de cohomologie, ...

B. Cordes non orientées

Nous n'avons étudié que des cordes orientées, dont on pouvait distinguer les extrémités. Pour regarder les cordes non orientées, il faut d'abord introduire un opérateur d'inversion de l'orientation, Ω . On s'intéresse ensuite au quotient $\text{Ker}(\Omega - \text{id}) / \text{Ker}(\Omega + \text{id})$, c'est-à-dire seulement aux états invariants sous l'inversion de l'orientation.

Les cordes non orientées sont intéressantes pour les groupes de jauge qu'elles font apparaître lorsqu'on les munit de charges de Chan-Paton. Une étude accessible en est faite dans [4], §3.4. Les groupes de jauge obtenus sont $SO(N)$ et $Sp(2N)$ (le deuxième est le groupe symplectique).

C. Energie des particules visibles

Nous n'avons pour l'instant pas du tout parlé de l'échelle d'énergie des cordes. Pour les masses, il y a le tachyon, dont on veut se débarasser, puis les particules de masse nulle, puis les premières particules massives. Ces dernières ont une masse de l'ordre de $\alpha'^{-\frac{1}{2}}$. Compte tenu des constantes que nous avons omises : c dans la métrique de Minkowski, \hbar dans la quantification et G pour relier les interactions avec les gravitons à la gravitation, la seule masse qu'il est possible de construire est la masse de Planck,

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 10^{28} \text{ eV} . \quad (5.23)$$

Ainsi le premier état excité devrait être beaucoup plus lourd que toutes les particules connues. Les particules connues sont donc contenues dans les excitations de masse nulle, et leur masse vient de légères brisures de symétries comme l'écartement de D-branes, ...

Remarquons que les masses des états enroulés ou ayant seulement un moment sont aussi liées à la pente de Regge par la dualité T et le rayon autodual.

5.4 Aperçu du modèle standard

A. Introduction

Nous avons maintenant les ingrédients nécessaires pour donner un premier aperçu de ce que peut être le modèle standard en théorie des cordes. Nous allons surtout chercher à voir comment il est possible de construire un modèle ressemblant au modèle standard par les particules et les interactions qu'il met en jeu.

Grossièrement, dans le modèle standard, des fermions chargés (sous certaines interactions) interagissent par l'échange de bosons de jauge. Ces bosons sont liés à des groupes de jauge. Le modèle standard est décrit par le groupe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. La brisure de symétrie de la partie $SU(2) \times U(1)$ permet de donner une masse aux bosons W^\pm et Z .

B. Premier modèle

Groupe de jauge et D-branes

Nous allons donner un modèle dont le groupe de jauge est $U(3) \times U(2)$, sans symétrie brisée. Pour obtenir ce groupe de jauge, il suffit, comme nous venons de le voir, de considérer cinq D-branes, dont trois sont superposées à un endroit et deux à un autre. Cette configuration est décrite FIG. 5.2. Ces branes sont séparées dans la fibre seulement et « recouvrent » toute la base. A ce niveau là, leur dimension exacte importe peu.

Par analogie avec le modèle standard, l'interaction décrite par $U(3)$ sera l'interaction forte et celle décrite par $U(2) = SU(2) \times U(1)$ l'interaction électrofaible. Cette dernière ne sera pas brisée ici. Les bosons de jauge seront nommés par analogie avec le modèle standard.

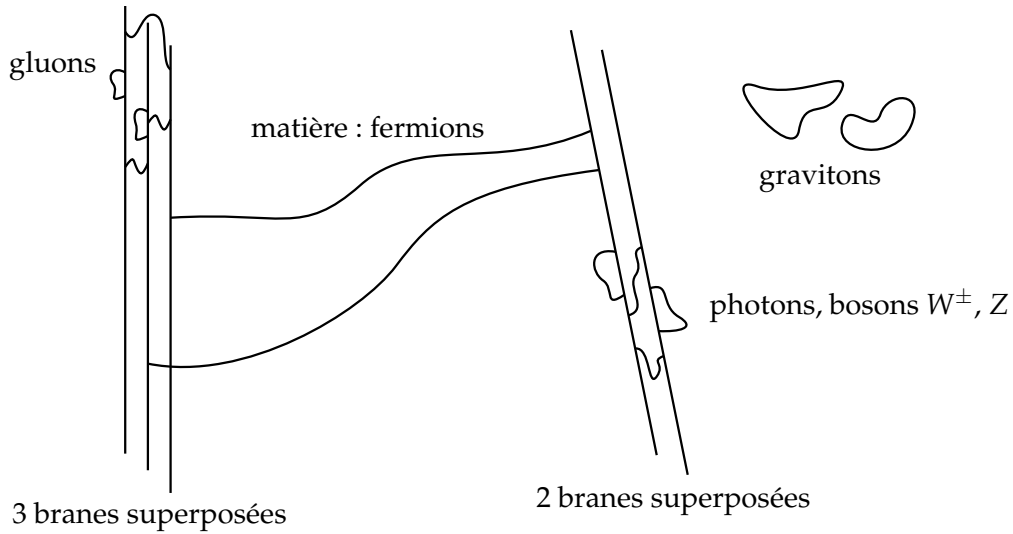


FIG. 5.2: Aperçu du modèle standard

Position des particules

Les bosons de jauge sont décrits par des cordes ouvertes reliant deux branes superposées. Il faut prendre des excitations donnant des bosons, donc dans le secteur NS+. Il y en a en tout $3^2 + 2^2 = 13$ et ils sont tous de masse nulle.

Les fermions, constituant la matière, sont obtenus en tendant des cordes entre les deux groupes de branes. Pour avoir des fermions, ils doivent être pris dans le secteur R. Il y en a $3 \times 2 = 6$ et leur masse est proportionnelle à l'écart entre les deux groupes de branes.

Pour briser la symétrie SU(2), il faudrait écarter légèrement les deux branes formant la symétrie U(2).

Enfin, les gravitons sont donnés par des excitations (NS+,NS+) de cordes fermées, et peuvent interagir avec les autres particules et se fixer à des branes.

Nous pouvons en dire un peu plus sur le modèle construit. Nous avons essayé d'y retrouver tous les types de particules connus, mais il contient d'autres types de particules. Un argument pour cela est l'invariance modulaire : les secteurs ne peuvent pas être choisis selon l'envie ou le besoin, comme nous l'avons vu plus haut.

C. Vers un modèle effectif ?

Après ce premier modèle, on peut se poser la question de la difficulté que présente l'établissement d'un modèle réaliste et effectif, c'est-à-dire permettant de retrouver, avec des corrections et moins de paramètres, le lagrangien du modèle standard. Nous pouvons dire deux choses.

Premièrement, il nous manque quelques outils. Comment, par exemple, obtenir un groupe SU(3) et non U(3) ? Comment briser correctement les symétries ? Comment calculer les amplitudes de diffusion, ... ? Certaines de ces questions n'ont toujours pas trouvé de réponse.

Deuxièmement, l'échelle d'énergie des cordes est énorme par rapport aux énergies des particules connues et accessibles à l'expérience. Il faudrait donc, pour faire des calculs

mesurables à notre échelle, faire des calculs extrêmement précis, ce qui n'est pas toujours facile.

Conclusion

ICI SE TERMINE cette trop courte promenade dans les fondations de la théorie des cordes. En partant du début, nous avons essayé de poser les premières pierres d'un édifice immense (peut-être même la tour de Babel). Toutes ces pierres ne sont pas taillées dans la même roche, et la richesse de la théorie des cordes vient autant de la diversité des méthodes qu'elle utilise que de la puissance des concepts qu'elle développe.

Guidés par le souhait de voir quelle forme la physique connue prenait en théorie des cordes, nous avons laissé de côté des aspects importants de cette théorie, que le lecteur curieux et encore ignorant s'empressera de lire ailleurs :

- la théorie perturbative des interactions entre cordes, reposant sur des fonctions de partition sur diverses surfaces de Riemann, dans lesquelles auront été insérés des opérateurs de vertex ;
- les autres types de cordes, dont la corde hétérotique, qui permet de faire apparaître, à sa manière, des groupes de jauge non abéliens et des différences gauche-droite ;
- le paysage des cordes, c'est-à-dire la forme de la fibre, qui peut permettre des briures de supersymétrie ;
- les dualités entre les théories des cordes : il n'y a pas que la dualité T, et les autres dualités permettent d'envisager que les différentes théories des cordes soient des sous-théorie d'une théorie plus générale : la théorie M ;
- ...

Cependant, certaines de ses questions risquent de rester sans réponse, le fin mot de l'histoire restant à découvrir.

Bibliographie

- [1] B. ZWIEBACH, *A first course in string theory*, Cambridge University Press, 2004
- [2] J. POLCHINSKI, *String theory vol.1 & 2*, Cambridge University Press, 2001
- [3] K. BECKER, M. BECKER, J.H. SCHWARZ, *String theory and M-theory*, Cambridge University Press, 2007
- [4] E. KIRITSIS, *String theory in a nutshell*, Princetown University Press, 2007
- [5] P. GINSPARG, *Applied conformal field theory*, Les Houches, Session XLIX, 1988