

Enseignement d'approfondissement de physique  
Théorie des groupes en physique subatomique

---

# Groupe de Poincaré et théorie relativiste des champs

---

Vincent DÉMERY

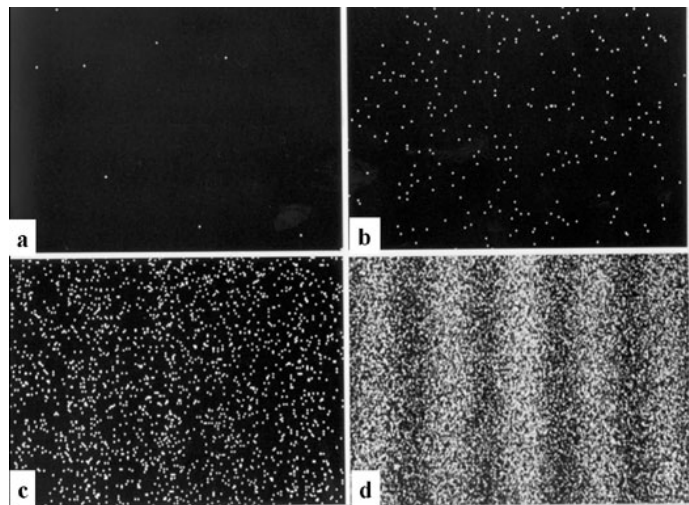
*Avec l'aide de :* Clément DUPONT

*Responsables de l'enseignement :*

David RENARD

Denis BERNARD

Nicole BERLINE



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>I Symétries et définition des particules</b>	<b>3</b>
I.1 Espace des états, équations	3
I.2 Groupe de transformations, groupe de symétries	3
I.3 Opérateurs de Casimir, définition d'une particule	4
I.4 Principe de relativité et groupes de symétries	4
<b>II Groupes de Lorentz et de Poincaré</b>	<b>6</b>
II.1 Structure	6
II.1.1 Groupe de Lorentz	6
II.1.2 Groupe de Poincaré	10
II.2 Relations de commutation et opérateurs de Casimir	10
II.2.1 Algèbre de Lie	11
II.2.2 Relations de commutation	12
II.2.3 Opérateurs de Casimir	13
II.3 Représentations irréductibles	15
II.3.1 Représentations de $SU(2)$	15
II.3.2 Représentations d'un produit semi-direct fini	16
II.3.3 Représentations du groupe de Poincaré	18
II.4 Conclusion	22
<b>III Théorie relativiste des champs</b>	<b>23</b>
III.1 Champs en position, en impulsion	23
III.1.1 Définition des champs	23
III.1.2 Transformée de Fourier	24
III.1.3 Généralisation	24
III.2 Application aux cas classiques	25
III.2.1 Champ scalaire et équation de Klein-Gordon	25
III.2.2 Champ spinoriel et équation de Dirac	25
III.2.3 Equations de Maxwell et photons	27
III.3 Problèmes non abordés ici	29
III.3.1 Structure d'espace de Hilbert	29
III.3.2 Observables	30
III.3.3 Formalisme Lagrangien	30
<b>IV Introduction à la théorie quantique des champs</b>	<b>31</b>
IV.1 Problème des interactions entre particules	31
IV.2 Espaces et opérateurs de base	32
IV.3 Retour aux fonctions d'onde	33
<b>Conclusion</b>	<b>35</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

# Introduction

Comment définir une particule élémentaire? Cette question paraît relever plus de la métaphysique que de la physique. Nous verrons pourtant que, supposant des symétries de la particule libre, il est possible d'en donner une définition mathématiquement satisfaisante. Plutôt que de répondre à la question de la définition d'une particule, nous répondrons aux questions suivantes : quelles sont les grandeurs qui caractérisent une particule ? quel est l'espace de ses états ?

La définition d'une particule que nous allons donner dès le départ fait appel à la théorie des groupes et de leurs représentations. De même, la théorie des groupes est centrale dans l'exploitation de cette définition en termes de grandeurs caractéristiques et d'états. Nous allons rapidement laisser de côté la généralité pour nous focaliser sur les symétries prescrites par la théorie de la relativité restreinte, données par le groupe de Poincaré. La masse et le spin des particules feront naturellement leur apparition.

La mécanique ondulatoire nous a donné une représentation intuitive des états d'une particule par des fonctions d'onde. Nous établirons le lien entre les états d'une particule d'après la définition de celle-ci, et les états donnés par des fonctions d'onde. Nous ferons même mieux : de la définition de la particule, nous déduirons des équations régissant ces fonctions d'onde. Dans le cas du groupe de Poincaré, cette démarche constitue le cœur de la théorie relativiste des champs.

Enfin, nous essaierons de mettre ce que nous aurons fait en relation avec une théorie encore plus générale et puissante : la théorie quantique des champs.

**Avertissement au lecteur mathématicien.** Il s'agit plus de physique que de mathématiques. Le mathématicien ne devra donc pas être trop scandalisé par les libertés prises avec certaines définitions, surtout celles concernant les objets physiques. Il ne devra pas non plus être trop frustré par la résolution de problèmes mathématiques par des arguments physiques lors de certaines études de cas. Beaucoup de démonstrations, souvent les plus intéressantes, sont admises pour laisser plus de place à l'utilisation et à l'interprétation des résultats. Finalement, le mathématicien se référera avec joie au travail de Clément.

**Avertissement au lecteur physicien.** Des résultats purement mathématiques sont au cœur de ce travail. Par soucis de clarté pour le lecteur mathématicien, de grandes parties sont présentées sous forme d'une succession de définitions, propriétés et démonstrations. Ce carcan mathématique, parfois néfaste à la liberté d'interprétation qui doit être laissée au physicien, vise surtout à permettre une lecture rapide, sans s'attarder sur des démonstrations parfois dépourvues d'intérêt physique.

# Chapitre I

## Symétries et définition des particules

Nous allons présenter ici le point de départ de notre démarche, en définissant précisément ce dont nous avons déjà une idée intuitive : un système physique, ses symétries ... Nous chercherons ensuite à définir une particule élémentaire, et nous verrons comment intervient la théorie des groupes dans ce contexte.

Notons cependant que cette approche très formelle n'est qu'une approche parmi d'autres, mais elle a l'avantage d'être assez concise et générale. Les définitions sont volontairement assez "larges", ceci afin de ne retenir que ce qui est utile pour introduire les notions fondamentales.

### I.1 Espace des états, équations

#### Espace des états

Comment définir un système physique ? Dans le cadre de la mécanique quantique, que nous utiliserons largement par la suite, un système physique est donné par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , l'*espace des états* du système.

Dans ce cadre, un *état du système* est défini comme un vecteur de son espace des états  $\psi \in \mathcal{H}$ . On ajoute comme condition que le vecteur soit normé :  $\|\psi\|^2 = 1$ .

#### Equations, principe de moindre action

Il faut maintenant dire comment, parmi tous les états du système, choisir l'état dans lequel "la nature va le mettre". Les façons de contraindre le système sont nombreuses, mais une méthode assez générale consiste à considérer le principe de moindre action. L'*action* est une fonction définie sur l'espace des états :  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Selon le principe de moindre action, l'état adopté par le système est un état qui rend l'action extrémale. Une condition suffisante est que la différentielle de l'action soit nulle dans cet état<sup>1</sup> :  $dS|_{\psi} = 0$ .

### I.2 Groupe de transformations, groupe de symétries

#### Groupe de transformations

Un changement de référentiel modifie les états d'un système. D'une manière générale, l'ensemble des transformations susceptibles de transformer l'état d'un système forme un groupe, que nous noterons  $G$ . Ce groupe va agir sur l'espace des états  $\mathcal{H}$ .

Il est naturel d'imposer que  $G$  agisse linéairement sur  $\mathcal{H}$ , qui devient alors un espace de représentation de  $G$ . Notons l'action de ce groupe  $(g, \psi) \mapsto g \cdot \psi$ , où  $g \in G$ ,  $\psi \in \mathcal{H}$ . Enfin,

---

<sup>1</sup>Une condition suffisante moins forte est que l'espace tangent à la sphère unité de  $\mathcal{H}$  en  $\psi$  soit inclus dans le noyau de la différentielle :  $T_{\psi}S_{\mathcal{H}} \subset \text{Ker } dS|_{\psi}$ , avec  $S_{\mathcal{H}} = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \|\psi\|^2 = 1\}$ .

pour que  $G$  transforme un état en un autre état, la représentation doit être unitaire : en notant  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ ,  $(g \cdot \varphi, g \cdot \psi) = (\varphi, \psi)$ .

Alors  $G$  est un *groupe de transformations* du système.

### Groupe de symétries

Nous allons maintenant traduire le fait que les lois physique doivent être invariantes sous l'action d'un groupe de transformations particulier, le *groupe de symétries*. Plus concrètement, on dira qu'un groupe de transformations  $G$  est un groupe de symétries si il laisse l'action invariante :  $\forall (g, \psi) \in G \times \mathcal{H}, S(g \cdot \psi) = S(\psi)$ . Etant donné un groupe de transformations, le sous-groupe constitué des éléments laissant l'action invariante est un groupe de symétries. Dorénavant, nous ne nous intéressons qu'aux groupes de symétries.

Si  $G$  est un groupe de Lie, on peut alors considérer son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Cette algèbre de Lie agit sur  $\mathcal{H}$  par la différentielle de la représentation de  $G$ . On notera de même  $k \cdot \psi$  l'action de  $k \in \mathfrak{g}$  sur  $\psi \in \mathcal{H}$ . Les conditions d'invariance de  $S$  sous l'action de  $G$  et d'unitarité de l'action de  $G$  se traduisent simplement en des conditions sur l'action de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , mais nous ne les utiliserons pas pour le moment.

## I.3 Opérateurs de Casimir, définition d'une particule

### Opérateurs de Casimir

Considérons maintenant un opérateur d'entrelacement  $T$  de la représentation de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  :  $T \in \text{End}(\mathcal{H})$  vérifie  $T(g \cdot \psi) = g \cdot T(\psi) \forall g \in G, \psi \in \mathcal{H}$ . Si la représentation de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  est irréductible, d'après le lemme de Schur, il existe  $\lambda_T \in \mathbb{C}$  telle que  $T = \lambda_T \text{id}_{\mathcal{H}}$ .  $\lambda_T$  est alors une grandeur caractéristique de la représentation.

Comment définir un opérateur d'entrelacement de manière naturelle ? Les seuls endomorphismes de l'espace des états dont nous disposons sont donnés par la représentation du groupe de symétries et de son algèbre de Lie. Divers exemples nous montrent que les éléments les plus intéressants sont ceux de l'algèbre de Lie, et nous allons donc les utiliser pour construire des opérateurs d'entrelacement. Un *opérateur de Casimir* est un polynôme d'éléments de l'algèbre de Lie (pour l'addition et la composition) qui est un opérateur d'entrelacement (via la représentation).

### Définition d'une particule

Nous allons maintenant essayer de donner un embryon de réponse à la question "qu'est-ce qu'une particule?". Que peut-on attendre d'une particule? Il paraît raisonnable de demander à une particule de posséder certaines grandeurs caractéristiques intrinsèques comme la masse, le spin, ... Ces grandeurs intrinsèques peuvent justement être obtenues à partir des opérateurs d'entrelacement, ou, plus précisément, des opérateurs de Casimir. Ceux-ci ne peuvent fournir de grandeur intrinsèque que si la représentation du groupe de symétries  $G$  dans l'espace des états  $\mathcal{H}$  est irréductible. Etant donné un groupe  $G$ , ce qui précède nous amène à donner la définition d'une *particule élémentaire* :

#### **Définition I.3.1 (Particule élémentaire)**

Soit  $G$  un groupe. Une *particule élémentaire* est une représentation irréductible unitaire du groupe  $G$ , qui est alors par définition le groupe de symétries de la particule.  $\diamond$

Un état d'une particule est simplement un vecteur de l'espace de représentation choisi.

Remarquons que cette définition d'une particule élémentaire dépend du groupe de symétries fixé. Nous en apercevrons les conséquences à la fin de ce chapitre.

## I.4 Principe de relativité et groupes de symétries

### Principe de relativité, groupes de Lorentz et de Poincaré

D'après le *principe de relativité*, "toutes les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels galiléens". De plus, la vitesse de la lumière dans le vide ne doit pas dépendre de la

vitesse de sa source.

Ces deux principes font apparaître le *groupe de Lorentz* qui permet linéairement de passer d'un référentiel galiléen à un autre (en coordonnées), et le *groupe de Poincaré*, constitué du groupe de Lorentz et des translations de l'espace-temps. D'après le principe de relativité, le groupe de Poincaré est un groupe de symétries des systèmes physiques que nous étudierons. Adaptant la définition donnée plus haut, une particule élémentaire est maintenant définie comme une représentation irréductible du groupe de Poincaré.

### Autres groupes de symétries

Que se passe-t-il si on modifie le groupe de symétries ? Par exemple, donnons nous deux groupes de symétries  $G \subset G'$ . Supposons que, partant du groupe  $G$ , le groupe  $G'$  a été construit en ajoutant des éléments qui commutent avec tous les éléments de  $G$ <sup>2</sup> :  $\forall g \in G, h \in G' \setminus G, gh = hg$ . Alors les opérateurs de Casimir de  $G$  restent opérateurs de Casimir de  $G'$ , et de nouveaux opérateurs de Casimir peuvent apparaître. La conclusion est la suivante : avec un groupe de symétries plus grand, les particules ont plus de grandeurs caractéristiques.

De même, les représentations irréductibles d'un groupe plus grand sont susceptibles d'être plus grandes, plus d'informations sont donc nécessaires pour décrire l'état d'une particule.

---

<sup>2</sup>Ceci est notamment le cas si  $G' = G \times H$ , ce cas est souvent rencontré en pratique.

# Chapitre II

## Groupes de Lorentz et de Poincaré

Nous allons définir de manière rigoureuse les groupes qui nous intéressent ici : le groupe de Lorentz et le groupe de Poincaré. Nous donnerons ensuite les éléments d'étude de ces groupes qui nous seront utiles pour la suite :

- Pour le groupe de Lorentz : sa structure, son revêtement universel.
- Pour le groupe de Poincaré : sa structure, ses opérateurs de Casimir, ses représentations irréductibles.

Notre objectif est le suivant : les particules vont être définies comme des représentations irréductibles unitaires du groupe de Poincaré (ou d'un groupe approchant). On veut déterminer les grandeurs qui caractérisent une particule et l'espace des états d'une particule, c'est à dire quel objet permet de décrire les différents états de la particule.

### II.1 Structure

#### II.1.1 Groupe de Lorentz

##### Espace-temps de Minkowski

L'espace naturel pour étudier l'évolution de particules libres est l'espace-temps de Minkowski. Un point  $x$  de cet espace-temps est repéré par quatre coordonnées réelles :  $x = (x^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$  ; cet espace peut donc être identifié à  $\mathbb{R}^4$ .

Cet espace est de plus muni d'une métrique particulière, la métrique de Minkowski (c'est à dire d'un pseudo-produit scalaire) :

**Définition II.1.1 (Espace-temps de Minkowski)**

L'espace-temps de Minkowski, que nous noterons  $V$ , est  $\mathbb{R}^4$  muni du pseudo-produit scalaire défini par :

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i$$

Les points de cet espace sont les évènements. ◇

La métrique de Minkowski est habituellement notée matriciellement  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Avec les conventions habituelles pour les sommations, on notera

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

Ici, nous utiliserons plutôt la notation matricielle, en considérant les points de l'espace de Minkowski comme des vecteurs colonne :

$$x \cdot y = x^T \eta y \tag{II.1}$$

Pour un rayon lumineux, un élément d'une trajectoire paramétrisée par  $\lambda$ ,  $ds = x(\lambda + d\lambda) - x(\lambda)$ , a par définition une norme nulle :

$$\|ds_{\text{lum}}\|^2 = 0$$

On peut aussi définir le *cône de lumière* comme étant l'ensemble des vecteurs de norme nulle : c'est l'ensemble des évènements pouvant être reliés par un rayon lumineux à l'origine du référentiel.

**Définition du groupe de Lorentz**

Le groupe de Lorentz est défini comme un groupe de transformations des coordonnées qui laisse invariante les lois de la physique, et notamment la loi de propagation de la lumière dans le vide, donc sa vitesse. Le groupe de Lorentz doit donc laisser invariant le cône de lumière. Nous admettons que ceci implique que le groupe de Lorentz doit laisser la métrique invariante. Notons  $\mathcal{L}$  le groupe de Lorentz, ce qui se précède se traduit par :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{L}, \forall (x, y) \in V^2, (\Lambda x)^T \eta (\Lambda y) = x^T \eta y$$

Cette propriété caractérise le groupe de Lorentz :

**Définition II.1.2 (Groupe de Lorentz)**

Le groupe de Lorentz  $\mathcal{L}$  est constitué des matrices réelles  $4 \times 4$   $\Lambda$  qui vérifient :

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

Comme la métrique préservée est  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , le groupe de Lorentz est aussi noté  $SO(3, 1)$ .

Le groupe de Lorentz est un groupe linéaire fermé : c'est un groupe de Lie. ◇

**Structure du groupe de Lorentz**

Nous allons montrer que le groupe de Lorentz est composé de quatre composantes connexes.

Prenons le déterminant dans la définition de  $\mathcal{L}$  : on obtient  $(\det \Lambda)^2 = 1$ , donc  $\det \Lambda = \pm 1$ . Le signe de  $\det \Lambda$  indique si la transformation des coordonnées "retourne" l'espace-temps.

Dans cette même équation, considérons l'élément de matrice  $(0, 0)$  : dans le membre de droite,  $\eta_{00} = 1$  et dans le membre de gauche,  $(\Lambda^T \eta \Lambda)_{00} = \sum_{\mu, \nu} \Lambda_{\mu 0} \Lambda_{\nu 0} \eta_{\mu \nu} = \Lambda_{00}^2 - \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2$ . Finalement,  $\Lambda_{00}^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda_{i0}^2 : |\Lambda_{00}| \geq 1$ . Le signe de  $\Lambda_{00}$  indique si la transformation des coordonnées inverse le sens du temps.

Ceci nous conduit à introduire la définition suivante :

**Définition II.1.3 (Groupe de Lorentz propre)**

Le groupe de Lorentz propre  $\mathcal{L}_0$  est le sous-groupe du groupe de Lorentz constitué des éléments  $\Lambda \in \mathcal{L}$  vérifiant  $\det \Lambda = 1$  et  $\Lambda_{00} \geq 1$ . ◇

Le lemme suivant est fondamental :

**Lemme II.1.4**

Tout élément  $\Lambda \in \mathcal{L}_0$  du groupe de Lorentz propre peut s'écrire sous la forme  $\Lambda = RLR'$  où :

- $R$  et  $R'$  sont des rotations de  $\mathbb{R}^3$ ,
- $L$  est une transformation spéciale de Lorentz.

*Démonstration* : écrivons  $\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$  et intéressons-nous à la projection de ce vecteur sur les

coordonnées d'espace.

On note  $r$  sa norme euclidienne :  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$  avec  $(x^0)^2 - r^2 = 1$ . Il existe une

rotation de  $\mathbb{R}^3$  qui envoie  $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$  sur  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ . On a alors  $S \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ .

Posons maintenant  $L = \begin{pmatrix} x^0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 0 & x^0 \end{pmatrix}$ . On a  $L \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Un calcul utilisant l'identité

$(x^0)^2 - r^2 = 1$  et le fait que  $x^0$  est strictement positif montre que  $L$  est la transformation spéciale de Lorentz dans la direction  $z$  de paramètre  $\alpha = \text{argth} \frac{r}{x^0}$ .



On a donc  $LS\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  $LS\Lambda$  est donc une rotation de  $\mathbb{R}^3$ , soit  $LS\Lambda = S'$ , ce qui termine

la démonstration.  $\square$

Le groupe de Lorentz propre possède la propriété suivante :

**Propriété II.1.5 (Connexité de  $\mathcal{L}_0$ )**

*Le groupe de Lorentz propre est connexe.*

Démonstration : ceci vient directement du lemme précédent : on peut aisément relier les rotations et les transformations spéciales de Lorentz à l'identité par un chemin continu, il suffit de faire varier leur paramètre.  $\square$

A partir du groupe de Lorentz propre, on peut retrouver tout le groupe de Lorentz en définissant les symétries :

**Définition II.1.6 (Parité, renversement du temps)**

*Les transformations parité et renversement du temps sont définies respectivement par les matrices  $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  et  $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .*  $\diamond$

$P$  et  $T$  commutent, le groupe engendré par ces deux matrices est donc  $\{I, P\} \times \{I, T\}$ . Ce groupe agit sur le groupe de Lorentz propre et on a la proposition suivante :

**Propriété II.1.7**

*Le groupe de Lorentz s'obtient à partir du groupe de Lorentz propre, de la parité et du renversement du temps par produit semi-direct :*

$$\mathcal{L} = (\{I, P\} \times \{I, T\}) \ltimes \mathcal{L}_0 \quad (\text{II.2})$$

Démonstration : clair.  $\square$

On aboutit enfin à la proposition voulue :

**Propriété II.1.8 (Structure du groupe de Lorentz)**

*Le groupe de Lorentz est composé des quatre composantes connexes  $\mathcal{L}_0$ ,  $P\mathcal{L}_0$ ,  $T\mathcal{L}_0$  et  $PT\mathcal{L}_0$ .*

Démonstration : la proposition précédente montre que  $\mathcal{L}$  est bien constitué de la réunion de ces classes. La continuité de  $\det \Lambda$  et de  $\Lambda_{00}$  montrent que deux de ces classes ne peuvent pas appartenir à la même composante connexe. Il y a donc au moins quatre composantes connexes. Ces quatre classes sont isomorphes à  $\mathcal{L}_0$  et comme  $\mathcal{L}_0$  est connexe, d'où la propriété.  $\square$

Le groupe de Lorentz propre possède une importance fondamentale : si on ne sait pas si les lois de la physique sont invariantes par parité et/ou renversement du temps, le groupe de symétries à utiliser est le groupe de Lorentz propre. Nous travaillerons donc en premier lieu sur le groupe de Lorentz propre, qui est plus facile à manipuler que le groupe de Lorentz complet.

Il reste une dernière propriété fondamentale du groupe de Lorentz à mettre en évidence : la non-compacité.

**Propriété II.1.9 (Non-compacité)**

*Le groupe de Lorentz (propre) n'est pas compact.*

Démonstration : il suffit pour cela d'exhiber un sous-groupe du groupe de Lorentz qui n'est pas compact. C'est le cas du sous-groupe à un paramètre :

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & \text{sh } \alpha & 0 & 0 \\ \text{sh } \alpha & \text{ch } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On montre facilement que c'est un sous-groupe à un paramètre du groupe de Lorentz (propre). Il est clair qu'il n'est pas compact.  $\square$

Le fait que le groupe de Lorentz ne soit pas compact a une conséquence importante pour l'utilisation que nous allons en faire, donnée par le théorème suivant :

**Théorème II.1.10 (Représentation des groupes non compacts)**

Soit  $G$  un groupe non compact. La seule représentation irréductible unitaire de dimension finie de  $G$  est la représentation triviale.

*Démonstration* : admis. □

**Revêtement du groupe de Lorentz propre par  $SL(2, \mathbb{C})$**

Nous allons ici exhiber un revêtement universel du groupe de Lorentz propre, ce qui nous sera utile dans la suite pour construire des représentations irréductibles.

Notons  $H_2$  l'espace des matrices  $2 \times 2$  hermitiennes. A un vecteur  $x = (x^\mu)$  de l'espace-temps  $V$  on associe une matrice  $X \in H_2$  par l'application bijective suivante :

$$\Psi : \begin{cases} V & \rightarrow \\ x = (x^\mu)_{1 \leq \mu \leq 4} & \mapsto X = \begin{pmatrix} H_2 & \\ x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le déterminant de cette matrice correspond au carré de la norme de  $x$  :

$$\det X = \|x\|^2$$

$SL(2, \mathbb{C})$  agit linéairement sur les matrices hermitiennes par, pour  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ ,

$$X \mapsto X' = AXA^*$$

Si  $x, x' \in V$  sont les vecteurs correspondants, on a  $\|x\|^2 = \|x'\|^2$ . L'action linéaire de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $V$  conserve la norme, donc c'est une transformation de Lorentz. On a donc déterminé un morphisme de groupes clairement continu

$$\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$$

Donnons maintenant les principales propriétés de  $SL(2, \mathbb{C})$  et de ce morphisme, tirées de [5] :

**Propriété II.1.11 (Connexité de  $SL(2, \mathbb{C})$ )**

$SL(2, \mathbb{C})$  est connexe par arcs.

*Démonstration* : Soit  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , alors  $A$  est trigonalisable en tant que matrice complexe  $2 \times 2$ . En intégrant la condition sur  $\det A$ , on peut écrire

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$$

En remplaçant  $a$  et  $b$  par les chemins  $\alpha : t \mapsto 1 - t + ta$  et  $\beta : t \mapsto tb$ , on obtient un chemin continu de  $I$  à  $A$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$ . □

On déduit de cette propriété et de la continuité de  $\Phi$  que  $\text{Im } \Phi \subset L_0$ .

**Propriété II.1.12 (Revêtement du groupe de Lorentz propre)**

Le morphisme  $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_0$  est un revêtement à deux feuillets :  $\text{Ker } \Phi = \{I, -I\}$ .

*Démonstration* : cette proposition est admise. Nous pouvons néanmoins donner quelques éléments de démonstration. Il suffit de déterminer l'image et le noyau de  $\Phi$ . Pour le noyau, on considère les matrices  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  telles que  $AXA^* = X \forall X \in H_2$  et on prend pour  $X$  l'identité puis les matrices de Pauli, d'où on déduit le noyau de  $\Phi$ . Comme  $\Phi$  est un morphisme, ceci montre l'injectivité locale, nécessaire pour avoir un revêtement.

La surjectivité se montre en décomposant un élément de  $\mathcal{L}_0$  avec le lemme II.1.4. On montre que les rotations et transformations spéciales de Lorentz sont dans l'image de  $\Phi$  en exhibant des antécédents. □

On remarque que  $\Phi_{|\text{SU}(2)} : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  est un revêtement. Il hérite des propriétés de  $\Phi$  : les antécédents de l'identité sont les mêmes, il a donc aussi deux feuilletés. Le diagramme suivant représente ces revêtements et inclusions :

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \longleftarrow & \text{SU}(2) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi_{|\text{SU}(2)} \\ \mathcal{L}_0 & \longleftarrow & \text{SO}(3) \end{array}$$

## II.1.2 Groupe de Poincaré

Le groupe de Lorentz est défini comme le groupe des transformations linéaires de l'espace-temps qui laisse la métrique invariante. Le groupe de Poincaré étend cette définition à partir du postulat suivant : les lois de la physique doivent être invariantes par translation dans l'espace-temps. Le groupe de Poincaré est donc le groupe des transformations *affines* de l'espace-temps dont la partie linéaire laisse la métrique invariante.

Le groupe de Lorentz agit naturellement sur  $V$ , le groupe de Poincaré apparaît alors comme produit demi-direct :

**Définition II.1.13 (Groupe de Poincaré (propre))**

Le groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$  est le produit semi-direct du groupe de Lorentz et des vecteurs de l'espace-temps :

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \ltimes V$$

On définit aussi le groupe de Poincaré propre en se restreignant aux transformations de Lorentz propres :  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{L}_0 \ltimes V$ .  $\diamond$

Un élément du groupe de Poincaré est noté  $(\Lambda, a)$ , avec  $\Lambda \in \mathcal{L}$  et  $a \in V$ . Par définition du produit semi-direct, la multiplication des deux éléments  $(\Lambda, a)$  et  $(\Lambda', a')$  de  $\mathcal{P}$  est donnée par  $(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a')$ .

Pour former des opérateurs de Casimir, le groupe de Poincaré doit être un groupe de Lie. C'est bien le cas :

**Propriété II.1.14**

Le groupe de Poincaré est un groupe de Lie.

Démonstration : Il suffit de remarquer qu'on a un morphisme de groupes injectif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \hookrightarrow \text{GL}_5(\mathbb{R}) \\ (\Lambda, a) \mapsto \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

L'image de ce morphisme est un sous-groupe fermé du groupe linéaire, donc est un groupe de Lie. Donc le groupe de Poincaré, isomorphe à l'image du morphisme, est un groupe de Lie.  $\square$

En ce qui concerne la compacité du groupe de Poincaré, nous avons logiquement le résultat suivant :

**Propriété II.1.15 (Non-compacité)**

Le groupe de Poincaré n'est pas compact.

Démonstration : ceci découle directement de la non-compacité du groupe de Lorentz.  $\square$

## II.2 Relations de commutation et opérateurs de Casimir

C'est le groupe de Poincaré qui nous servira à définir les particules. Nous allons donc directement étudier l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. Nous allons commencer par définir les éléments de cette algèbre de Lie, puis nous calculerons leurs relations de commutation avant de donner les opérateurs de Casimir qu'il est possible de construire, ainsi que leur interprétation physique.

### II.2.1 Algèbre de Lie

L'algèbre de Lie est par définition le plan tangent au groupe de Lie en son élément neutre. Nous allons donc devoir considérer des "petites transformations", ou "transformations infinitésimales".

Nous allons user massivement de la multiplication des tenseurs avec les conventions de sommation d'Einstein, les notations et règles de calcul sont brièvement rappelées ci-dessous.

#### Notations

Nous allons souvent travailler en composantes, covariantes (notées en indice) ou contravariantes (notées en exposant) en utilisant la métrique pour passer des unes aux autres. Par exemple, pour un vecteur  $x$  :

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

On s'aperçoit vite que la métrique, doit vérifier la relation :

$$\eta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Il est important de remarquer que, si les indices peuvent être "montés" ou "descendus", l'ordre des indices est important, il ne peut être échangé que par transposition.

La relation matricielle définissant le groupe de Lorentz s'écrit en composantes :

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu \eta_{\rho\sigma} \quad (\text{II.3})$$

Enfin, on a facilement l'expression des composantes de  $\Lambda^{-1}$  pour  $\Lambda \in \mathcal{L}$  en multipliant la relation matricielle par  $\Lambda^{-1}$  à droite :  $\eta \Lambda^{-1} = \Lambda^T \eta$  et donc :

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$$

#### Eléments de l'algèbre de Lie

Nous allons introduire les éléments de l'algèbre de Lie de manière implicite. Considérons pour cela une transformation de Poincaré infinitésimale :

$$(\Lambda, a) = (1 + \omega, \varepsilon)$$

avec, par définition,  $\|\omega\|, \|\varepsilon\| \ll 1$ .

La matrice infinitésimale  $\omega$  n'est pas tout à fait quelconque : en utilisant  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$  dans la définition du groupe de Lorentz, on obtient que  $\omega$  est antisymétrique :

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$$

On définit alors implicitement les éléments de l'algèbre de Lie :

#### **Définition II.2.1 (Algèbre de Lie du groupe de Poincaré)**

Les éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré,  $(J^{\mu\nu})_{0 \leq \mu, \nu \leq 3}$  et  $(P^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$  sont tels que pour toute transformation infinitésimale  $(1 + \omega, \varepsilon)$ ,

$$(1 + \omega, \varepsilon) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \varepsilon_\mu P^\mu$$

Ces éléments sont parfois appelés générateurs. ◇

Les opérateurs  $P^\mu$  et  $J^{\mu\nu}$  ne sont pas explicitement définis, mais cela n'est pas nécessaire : notre objectif est de les faire agir sur des espaces vectoriels, et dans ce cas la définition par la relation ci-dessus est suffisante. Notamment, on a une certaine liberté dans le choix de la matrice  $(J^{\mu\nu})$  :

#### **Propriété II.2.2**

La "matrice d'opérateurs"  $(J^{\mu\nu})$  peut être choisie antisymétrique.

*Démonstration* : cela vient du fait qu'elle est contractée avec un tenseur antisymétrique. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu}) J^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\nu\mu} J^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\nu\mu} \\
&= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu} - J^{\nu\mu}) \\
&= \omega_{\mu\nu} J'^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

où on a posé  $J'^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(J^{\mu\nu} - J^{\nu\mu})$ .  $J'^{\mu\nu}$  correspond aussi bien que  $J^{\mu\nu}$  à la définition, et est clairement antisymétrique. On a bien montré que l'on possède une liberté sur  $(J^{\mu\nu})$ , qui permet de la choisir antisymétrique.  $\square$

Dans la suite, nous considérerons toujours cette matrice antisymétrique.

Considérons maintenant les éléments du groupe de Poincaré comme des opérateurs unitaires (ce qui se produit quand on considère une représentation unitaire du groupe), l'unitarité s'écrit alors :

$$(\Lambda, a)^\dagger (\Lambda, a) = 1$$

On a alors la proposition suivante :

**Propriété II.2.3**

Les opérateurs  $(J^{\mu\nu})$  et  $(P^\mu)$ , agissant sur un espace vectoriel via une représentation unitaire du groupe de Poincaré, sont hermitiens.

*Démonstration* : Explicitons cette relation au premier ordre pour une transformation infinitésimale, avec les éléments de l'algèbre de Lie :

$$\begin{aligned}
1 &= (1 + \omega, \varepsilon)^\dagger (1 + \omega, \varepsilon) \\
&= (1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu)^\dagger (1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu) \\
&= (1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu\dagger} + i\varepsilon_\mu P^{\mu\dagger}) (1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i\varepsilon_\mu P^\mu) \\
&= 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu} - J^{\mu\nu\dagger}) - i\varepsilon_\mu (P^\mu - P^{\mu\dagger}) + \mathcal{O}(2)
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{O}(2)$  représente un terme infinitésimal d'ordre 2. Cette relation étant vérifiée pour toute transformation infinitésimale, on a bien que ces opérateurs sont hermitiens.  $\square$

La démonstration est en fait plus générale, ceci est vrai pour tous les éléments de l'algèbre de Lie dès que l'on a une représentation unitaire. Ceci justifie à posteriori le coefficient  $i$  devant les générateurs. Ce coefficient est toujours présent en physique : grâce à lui, les générateurs sont hermitiens, ce sont donc des observables. Les coefficients  $\frac{1}{2}$  et  $-1$  permettent de faire en sorte que les générateurs correspondent à des grandeurs déjà connues.

Profitons-en pour dire à quelles grandeurs physiques ces générateurs correspondent.  $P^\mu$ , générateur de la translation selon  $x^\mu$ , correspond à l'impulsion. Les opérateurs  $J^{\mu\nu}$  correspondent au moment cinétique, mais certains, liés à des transformations de Lorentz mélangeant temps et espace, ont une interprétation plus délicate.

Enfin, on connaît la dimension de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré :

**Propriété II.2.4**

L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est de dimension 10.

*Démonstration* :  $\omega$  est une matrice antisymétrique quelconque, elle a donc 6 coefficients indépendants<sup>1</sup>.  $\varepsilon$  est un vecteur de  $V$  et a donc 4 composantes indépendantes. Finalement, l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz est de dimension  $6 + 4 = 10$ .  $\square$

## II.2.2 Relations de commutation

Pour connaître une algèbre de Lie, il faut connaître les relations de commutation entre ses éléments. Ces relations de commutations sont aussi indispensables pour chercher des opérateurs de Casimir. Nous allons ici suivre la méthode décrite dans [7]. La recherche des relations de commutation est inévitablement calculatoire, tous les calculs ne seront pas exposés ici.

<sup>1</sup>Ceci correspond à la dimension de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz.

Considérons deux éléments du groupe de Poincaré :  $(\Lambda, a)$  et  $(1 + \omega, \varepsilon)$ , infinitésimal. Nous allons exprimer le produit  $(\Lambda, a)(1 + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1}$  en terme d'opérateurs  $J$  et  $P$ , avec deux méthodes différentes :

- en écrivant  $(1 + \omega, \varepsilon)$  avec les opérateurs  $J$  et  $P$ , puis en effectuant le produit,
- en calculant le produit avec les règles usuelles avant de développer avec les opérateurs.

En écrivant l'égalité des deux membres quelque soit la transformation infinitésimale, puis en rendant la transformation  $(\Lambda, a)$  infinitésimale, nous obtiendrons les relations de commutation.

On a donc, d'une part :

$$(\Lambda, a)(1 + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1} = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda, a)J^{\mu\nu}(\Lambda, a)^{-1} - i\varepsilon_{\mu}(\Lambda, a)P^{\mu}(\Lambda, a)^{-1}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} (\Lambda, a)(1 + \omega, \varepsilon)(\Lambda, a)^{-1} &= 1 + \frac{i}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i(\Lambda\varepsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\rho}P^{\rho} \\ &= 1 + \frac{i}{2}\Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu}\omega_{\mu\nu}J^{\rho\sigma} - i(\Lambda_{\rho}^{\mu}\varepsilon_{\mu} - \Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu}\omega_{\mu\nu}a^{\sigma})P^{\rho} \end{aligned}$$

où les coefficients des produits ont été calculés. En écrivant l'égalité des deux termes calculés quelle que soit la transformation  $(1 + \omega, \varepsilon)$  et en "antisymétrisant"  $a^{\sigma}P^{\rho}$  en  $\frac{1}{2}(a^{\sigma}P^{\rho} - a^{\rho}P^{\sigma})$  avec la même méthode que pour  $(J^{\mu\nu})$ , on obtient :

$$\begin{cases} (\Lambda, a)J^{\mu\nu}(\Lambda, a)^{-1} &= \Lambda_{\rho}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu}(J^{\rho\sigma} - a^{\rho}P^{\sigma} + a^{\sigma}P^{\rho}) \\ (\Lambda, a)P^{\mu}(\Lambda, a)^{-1} &= \Lambda_{\nu}^{\mu}P^{\nu} \end{cases}$$

La relation obtenue ne dépend plus de  $(1 + \omega, \varepsilon)$ . Il faut maintenant prendre dans cette relation  $(\Lambda, a) = (1 + \omega, \varepsilon)$  et effectuer les développements à l'ordre 1. On écrit ensuite l'égalité quelle que soit la transformation  $(1 + \omega, \varepsilon)$ . On obtient ainsi les relations de commutation :

### **Propriété II.2.5 (Relations de commutation)**

Les relations de commutation des éléments de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré sont :

$$\begin{aligned} i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} \\ i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho}P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}P^{\rho} \\ [P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0 \end{aligned}$$

*Démonstration* : découle directement de ce qui précède, moyennant quelques antisymétrisations et changements d'indices.  $\square$

Ces relations de commutation n'ont rien d'exceptionnel, elle correspondent aux relations de commutation des translations, rotations, et transformations spéciales de Lorentz.

## II.2.3 Opérateurs de Casimir

Nous allons maintenant essayer de déterminer les opérateurs de Casimir, c'est à dire des polynômes des opérateurs  $(J^{\mu\nu})$  et  $(P^{\mu})$  qui commutent avec tous ces opérateurs. La construction de tels opérateurs est décrite dans [6] et suit une démarche que nous reprenons ici. Cette démarche comprend deux étapes : la recherche des opérateurs et leur interprétation physique en terme de grandeur caractéristique.

### **$P^2$ et la masse**

On utilise ici le fait que le carré d'un quadrivecteur est un invariant, et les relations de commutation montrent que  $P$  est un quadrivecteur. On a donc :

### **Propriété II.2.6**

$P^2 = P^{\mu}P_{\mu}$  est un opérateur de Casimir.

*Démonstration* : il suffit d'utiliser les relations de commutation pour montrer que  $P^2 = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$  commute avec tous les générateurs. On a clairement :

$$[P^2, P^\mu] = 0$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} [P^2, J^{\mu\nu}] &= \eta_{\rho\sigma} P^\rho [P^\sigma, J^{\mu\nu}] + \eta_{\rho\sigma} [P^\rho, J^{\mu\nu}] P^\sigma \\ &= -i\eta_{\rho\sigma} P^\rho (\eta^{\sigma\mu} P^\nu - \eta^{\sigma\nu} P^\mu) - i\eta_{\rho\sigma} (\eta^{\rho\mu} P^\nu - \eta^{\rho\nu} P^\mu) P^\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

car chacun des deux termes est nul, comme le montre le calcul suivant :

$$\eta_{\rho\sigma} P^\rho (\eta^{\sigma\mu} P^\nu - \eta^{\sigma\nu} P^\mu) = P_\sigma (\eta^{\sigma\mu} P^\nu - \eta^{\sigma\nu} P^\mu) = P^\mu P^\nu - P^\nu P^\mu = 0$$

Nous avons bien montré que  $P^2$  était un opérateur de Casimir.  $\square$

$P^2$  est donc un opérateur d'entrelacement des représentations du groupe de Poincaré. Si une représentation est irréductible, on a alors  $P^2 = \lambda_{P^2} \text{id}$ , où  $\lambda_{P^2}$  est une constante que nous devons interpréter. Or on sait qu'en relativité restreinte, pour une particule d'impulsion ( $p^\mu$ ), on a la valeur de  $p^2$  :  $p^2 = m^2$ , où  $m$  est la masse de la particule. Ceci nous amène à définir la masse de la manière suivante :

**Définition II.2.7 (Masse d'une particule)**

Pour une particule élémentaire, c'est à dire une représentation irréductible du groupe de Poincaré, l'opérateur  $P^2$  est un multiple de l'identité. La masse  $m$  de la particule est définie par

$$P^2 = m^2 \text{id}$$

$\diamond$

A priori,  $m^2$  peut prendre n'importe quelle valeur réelle ( $P^2$ , comme toutes les composantes de  $P$ , est hermitien). Nous éliminerons par la suite le cas  $m^2 < 0$ , qui conduit à une masse imaginaire pure. Il nous reste le cas  $m^2 \geq 0$ , pour lequel on prend  $m \geq 0$ , ce qui lève l'indétermination sur la définition de la masse.

**$W^2$  et le spin**

Pour définir un second opérateur de Casimir, nous avons besoin d'introduire un second "quadrivecteur d'opérateurs" :

**Définition II.2.8 (Vecteur de Pauli-Lubanski)**

Le vecteur de Pauli-Lubanski est un opérateur défini à partir des générateurs par :

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu J^{\rho\sigma}$$

$\diamond$

Nous avons utilisé la quantité  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , complètement antisymétrique avec  $\epsilon_{0123} = 1$ .  $W$  est un polynôme des générateurs, et peut donc être utilisé pour définir un opérateur de Casimir. Il faut pour cela calculer ses relations de commutation avec les générateurs.

Calculons donc :

$$\begin{aligned} [W_\mu, P^\rho] &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu J^{\alpha\beta}, P^\rho \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu [J^{\alpha\beta}, P^\rho] \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu (\eta^{\rho\alpha} P^\beta - \eta^{\rho\beta} P^\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu \eta^{\rho\alpha} P^\beta = \eta^{\rho\alpha} \frac{1}{2} (\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} - \epsilon_{\mu\beta\alpha\nu}) P^\nu P^\beta = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} (\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu P^\beta - \epsilon_{\mu\beta\alpha\nu} P^\beta P^\nu) = 0$$

en effectuant le changement d'indices  $\nu \leftrightarrow \beta$  dans le deuxième terme.

Pour l'autre commutateur, les calculs sont plus complexes et nous nous contenterons ici d'admettre leur résultat :

$$i[W_\mu, J_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}W_\sigma - \eta_{\mu\sigma}W_\rho$$

A partir des identités précédentes, on obtient le commutateur :

$$i[W_\mu, W_\nu] = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma$$

On remarque que les deux premières relations de commutation sont identiques à celles vérifiées par les composantes  $(P^\mu)$ , d'où la propriété suivante :

**Propriété II.2.9**

$W^2 = W^\mu W_\mu$  est un opérateur de Casimir.

Démonstration : la démonstration est la même que pour  $P^2$  et découle des identités que l'on vient de montrer.  $\square$

Comme nous l'avons vu, une représentation irréductible du groupe de Poincaré aura une grandeur caractéristique :  $\lambda_{W^2}$ .

Il est possible d'interpréter ici cette grandeur, ce qui est fait dans [3, 6]. Nous nous contenterons ici de dire qu'elle permet de définir le spin. Si nous ne développons pas plus cette approche, c'est parce que le spin apparaîtra plus naturellement lorsque nous étudierons plus précisément la forme des représentations du groupe de Poincaré, dans la section suivante.

## II.3 Représentations irréductibles

Notre objectif ici est de déterminer les représentations qui représenteront des particules élémentaires, c'est à dire les représentations irréductibles du groupe de Poincaré. Les représentations de  $SU(2)$  seront étudiées en guise de préliminaire. Nous verrons ensuite comment sont construites les représentations d'un produit semi-direct fini, puis nous étendrons cette étude au groupe de Poincaré.

Rappelons que les représentations que nous cherchons sont unitaires, elles seront donc de dimension infinie.

### II.3.1 Représentations de $SU(2)$

Nous cherchons ici les représentations de dimension finie de  $SU(2)$ . L'étude des représentations de  $SU(2)$  est un grand classique de la théorie des groupes, aussi nous ne démontrerons que peu de résultats et admettrons ceux donnés dans [2].

Concernant la topologie de  $SU(2)$ , on a le résultat suivant :

**Propriété II.3.1 (Topologie de  $SU(2)$ )**

$SU(2)$  est compact et simplement connexe.

Démonstration : Un élément de  $SU(2)$  est déterminé par  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . On en déduit que  $SU(2)$  est difféomorphe à la sphère  $S^3$ , qui est compacte et simplement connexe, d'où la propriété.  $\square$

Comme  $SU(2)$  est compact, ses représentations irréductibles sont de dimension finie.

$SU(2)$  agit naturellement sur  $\mathbb{C}^2$ , donc sur les fonctions sur  $\mathbb{C}^2$ . Si  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , l'action de  $A \in SU(2)$  sur  $f$  est donnée par :

$$A \cdot f = f \circ A^{-1}$$

Soit  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , on note  $V^j$  l'espace vectoriel des polynômes homogènes à coefficients complexes en deux variables  $(z_1, z_2)$  de degré  $2j$ . On a  $\dim V^j = 2j + 1$ . On remarque que  $V^j$  est stable par l'action que l'on vient de donner, et fournit donc une représentation de  $SU(2)$ .



**Définition II.3.2 (Représentations  $\mathcal{D}^j$  de  $SU(2)$ )**

On note  $\mathcal{D}^j$  la représentation de  $SU(2)$  de dimension  $2j + 1$  dans  $V^j$ . Elle est donnée par l'action naturelle de  $SU(2)$  sur les fonctions sur  $\mathbb{C}^2$ .  $\diamond$

Ces représentations sont unitarisables car  $SU(2)$  est compact, et il est facile de montrer qu'elles sont irréductibles. On a alors le théorème suivant, fondamental pour la suite :

**Théorème II.3.3 (Représentations irréductibles de  $SU(2)$ )**

Pour toute représentation irréductible  $\rho$  de  $SU(2)$ , il existe  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , donné par  $\dim \rho$ , tel que  $\rho$  soit isomorphe à  $\mathcal{D}^j$ .

*Démonstration* : admis.  $\square$

**II.3.2 Représentations d'un produit semi-direct fini**

Nous suivons ici la démarche de [5] pour étudier puis construire les représentations d'un produit semi-direct fini.

On considère donc un produit semi-direct

$$G = H \ltimes N$$

De plus nous supposons que  $N$  est abélien.

Considérant  $H$  et  $N$  comme des sous-groupes de  $G$ , le groupe  $H$  agit sur  $N$  par conjugaison dans  $G$  :  $h \cdot n = hnh^{-1}$ .  $H$  agit donc également sur les fonctions sur  $N$  : pour  $f : N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h \cdot f(n) = f(h^{-1} \cdot n) = f(h^{-1}nh)$ .

Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1 (ceci découle immédiatement du Lemme de Schur), elles sont simplement données par un morphisme de groupes  $\chi : (N, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ .  $\chi$  est aussi un *caractère*, ce qui permet de définir :

**Définition II.3.4 (Ensemble des caractères)**

Soit  $G = H \ltimes N$  un produit semi-direct avec  $N$  abélien. On définit l'ensemble des morphismes de groupes

$$N^* = \{\chi : (N, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)\}$$

$N^*$  est l'ensemble des caractères sur  $N$ , c'est aussi l'ensemble des représentations irréductibles de  $N$ .

$H$  agit sur ces caractères par :

$$(h \cdot \chi)(n) = \chi(h^{-1} \cdot n)$$

$\diamond$

**Démontage d'une représentation**

Soit  $(\rho, V)$  une représentation irréductible du produit semi-direct  $G$ . La restriction de cette représentation à  $N$ ,  $(\rho|_N, V)$ , se décompose en somme de représentations irréductibles :  $V = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} m_i W_i$ , où  $W_i$  est l'espace de représentation irréductible de  $N$  associé au caractère  $\chi_i$ ,  $m_i$  est la multiplicité de cette représentation. On note  $V_{\chi_i} = m_i W_i$ , alors

$$V_{\chi_i} = \{x \in V \mid \rho(n)x = \chi_i(n)x, \forall n \in N\}$$

Regardons comment  $G$  agit sur  $x \in V_{\chi_i}$  : soit  $g \in G$ ,  $n \in N$ , calculons

$$\begin{aligned} \rho(n)\rho(g)x &= \rho(g)\rho(g)^{-1}\rho(n)\rho(g)x \\ &= \rho(g)\rho(g^{-1}ng)x \\ &= \rho(g)\chi_i(g^{-1}ng)x \\ &= (g \cdot \chi_i)(n)\rho(g)x \end{aligned}$$

Par définition de  $V_{\chi_i}$ , ce calcul montre que

$$\rho(g)V_{\chi_i} = V_{g \cdot \chi_i}$$

Pour arriver à un sous-espace de  $V$  stable par  $\rho$ , il faut introduire l'orbite d'un caractère :

**Définition II.3.5 (Orbite d'un caractère)**

Soit  $\chi_i \in N^*$  un caractère de  $N$ . On note  $N_i^* \subset N^*$  l'orbite de ce caractère sous l'action de  $G$  :

$$N_i^* = G \cdot \chi_i = \{g \cdot \chi_i \mid g \in G\}$$

◇

Remarquons que comme l'action de  $N$  sur  $N^*$  est triviale, il suffit de considérer l'action de  $H$  :  $N_i^* = G \cdot \chi_i = H \cdot \chi_i$ .

Il apparaît alors clairement que  $\bigoplus_{g \in G} V_{g \cdot \chi_i}$  est un sous-espace de  $V$  stable par  $\rho$ . Comme  $V$  est irréductible, ce sous-espace est soit vide, soit  $V$ , donc

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_{g \cdot \chi_i} = \bigoplus_{\chi \in N_i^*} V_\chi$$

pour un certain  $\chi_i \in N^*$ .

D'après cette dernière expression,  $V$  peut être vu comme l'ensemble  $\Gamma(E)$  des sections d'un fibré vectoriel  $E \rightarrow N_i^*$ . La représentation  $(\rho, V)$  devient équivalente à l'action de  $G$  sur  $\Gamma(E)$  (cette action naturelle sera explicitée plus loin, lors de la construction des représentations).

Exprimons maintenant le fait que  $(\rho, V)$  est irréductible, en étudiant l'action de  $G$  sur  $\Gamma(E)$ . On a pour cela besoin d'introduire le groupe d'isotropie :

**Définition II.3.6 (Groupe d'isotropie ou petit groupe)**

Soit  $\chi \in N^*$  un caractère sur  $N$ . Le groupe d'isotropie de ce caractère est le sous-groupe  $G_\chi \subset G$  constitué des éléments qui le laissent invariant :

$$G_\chi = \{g \in G \mid g \cdot \chi = \chi\}$$

Ce sous-groupe est aussi appelé petit groupe du caractère  $\chi$ .

◇

Soit alors  $G_i \subset G$  le groupe d'isotropie de  $\chi_i \in N_i^*$ . Alors  $G_i$  peut s'écrire comme le produit semi-direct  $G_i = H_i \ltimes N$ , où  $H_i = G_i \cap H \subset H$ . Par définition,  $G_i$  est représenté dans  $V_{\chi_i}$ , de même que  $H_i$ .

Il est important de noter que  $G/G_i \approx N_i^*$ , l'isomorphisme étant donné par  $gG_i \mapsto g\chi_i$ . La surjectivité vient de la définition de  $N_i^*$  et l'injectivité de celle de  $G_i$ .

Pour que la représentation de  $G$  dans  $\Gamma(E)$  soit irréductible, il faut et il suffit que la représentation de  $G_i$  dans  $V_{\chi_i}$  le soit, donc que la représentation de  $H_i$  dans  $V_{\chi_i}$  le soit.

Nous avons donc montré que toute représentation irréductible d'un produit semi-direct pouvait s'écrire comme l'action du groupe sur les sections d'un fibré vectoriel de base l'orbite d'un caractère et de fibre un espace de représentation irréductible du sous-groupe d'isotropie du caractère.

**Construction des représentations**

Nous allons ici effectuer la démarche inverse de celle présentée dans le paragraphe précédent : nous allons voir comment construire une représentation d'un produit semi-direct à partir de "représentations élémentaires" de groupes d'isotropie. Cette démarche sera appliquée par la suite au groupe de Poincaré.

Voici la recette de construction d'une représentation irréductible d'un produit semi-direct :

**Propriété II.3.7 (Construction des représentations irréductibles)**

Soit  $G = H \ltimes N$  avec  $N$  abélien. Voici comment construire une représentation irréductible de  $G$

1. Déterminer les orbites de  $N^*$  sous l'action de  $H$  et en choisir une, qui sera notée  $N_i^*$ . Choisir un représentant  $\chi_i \in N_i^*$  de cette orbite.
2. Déterminer le sous-groupe d'isotropie  $H_i \subset H$  du représentant  $\chi_i$  et choisir une représentation irréductible  $(\rho_i, V_i)$  de ce sous-groupe.  $(\rho_i, V_i)$  peut alors être considérée comme une représentation de  $G_i = H_i \ltimes N$  par

$$\rho_i(hn) = \chi_i(n)\rho_i(h) \quad \forall hn \in G_i$$

3. Induire cette représentation de  $G_i$  à  $G$  en construisant le fibré vectoriel  $E \rightarrow N_i^*$  de fibre  $V_i$ . Pour cette induction, la méthode à utiliser est celle donnée dans [1] (les actions à utiliser sont  $k \cdot (g, v) = (gk^{-1}, \rho_i(k)v)$  pour le quotient et  $k \cdot (g, v) = (kg, v)$  pour l'action sur le fibré). Soit  $\sigma \in \Gamma(E)$  une section de ce fibré donnée par  $\sigma(g \cdot \chi_i) = [(g, s(g))]$ , l'action de  $k \in G$  sur cette section est donnée par

$$(k \cdot \sigma)(g \cdot \chi_i) = [(g, s(k^{-1}g \cdot \chi_i))]$$

Si la représentation  $(\rho_i, V_i)$  est irréductible, la représentation construite sur  $\Gamma(E)$  est irréductible.

*Démonstration* : on part de la remarque suivante : l'espace initial  $V_i$  peut être identifié à l'espace  $(\Gamma(E))_{\chi_i}$  des sections de  $E$  à support dans  $\{\chi_i\}$ . Si  $\Gamma(E) = \Gamma(E)' + \Gamma(E)''$ , alors  $(\Gamma(E))_{\chi_i} = (\Gamma(E))'_{\chi_i} + (\Gamma(E))''_{\chi_i}$ . Tous ces espaces sont invariants sous l'action de  $H_i$ .

Comme  $(\Gamma(E))_{\chi_i} = V_i$  et que la représentation de  $H_i$  dans  $V_i$  est irréductible par hypothèse,  $(\Gamma(E))''_{\chi_i} = \{0\}$ . On en déduit que  $\Gamma(E)'' = \{0\}$ ,  $\Gamma(E)$  est bien irréductible.  $\square$

### II.3.3 Représentations du groupe de Poincaré

Nous allons utiliser la méthode que l'on vient de voir pour les groupes finis au groupe de Poincaré. Ce qui a été fait dans le cas discret se transpose au cas continu. La validité de cette méthode a été prouvée par Wigner puis généralisée par Mackey. Nous nous contentons de l'utiliser selon [5].

Comme nous l'avons dit plus haut, nous allons chercher à représenter le groupe de Poincaré propre, groupe que nous considérons comme le groupe de symétries d'une particule libre. Nous serons amenés à modifier ce groupe pour inclure des représentations théoriquement non acceptables mais présentes dans la nature. Des représentations que nous construirons, nous déduirons les caractéristiques des particules et comment décrire leur état.

Ecrivons le groupe de Poincaré propre comme produit semi-direct :

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{L}_0 \ltimes V$$

#### Caractères

Il faut commencer par déterminer les caractères de  $V$ .

Dans le cas d'un groupe  $N$  fini de cardinal  $p$ , on a, pour un caractère  $\chi \in N^*$  et pour  $n \in N$ ,  $\chi(n)^p = 1$ , d'où  $|\chi(n)| = 1$ .

Comme le groupe  $V$  est infini, cette condition ne découle plus de la définition : il faut l'imposer. On définit donc l'ensemble  $V^*$  des caractères comme l'ensemble des représentations irréductibles unitaires de  $V$ .

#### Propriété II.3.8 (Description des caractères)

Soit  $\chi \in V^*$  un caractère de  $V$ . Alors il existe un élément  $p$  du dual de  $V$  tel que  $\forall x \in V$ ,

$$\chi(x) = e^{ip \cdot x}$$

L'ensemble des caractères  $V^*$  peut donc être identifié au dual de  $V$ .

*Démonstration* : un caractère est une représentation irréductible unitaire de  $V$ . Une telle représentation est donnée par un morphisme de groupes  $V \rightarrow S^1$  ( $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ).

Soit  $\chi : V \rightarrow S^1$  un tel morphisme. Il doit être continu (c'est un morphisme de groupes topologiques), on peut donc le relever : il existe une fonction continue  $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in V$ ,  $\chi(x) = e^{i\theta(x)}$ . La condition  $\chi(x+x') = \chi(x)\chi(x')$  se traduit en  $\theta(x+x') = \theta(x) + \theta(x') + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La continuité de  $\theta$  implique que  $k$  doit être le même pour tous les  $x, x'$ , on peut donc prendre  $k = 0$ , donc  $\theta$  est simplement une forme linéaire sur  $V$  : il existe un élément  $p$  du dual de  $V$  tel que  $\theta(x) = p \cdot x \forall x \in V$ .  $\square$

Ceci justifie a posteriori la notation  $V^*$ . Quand le caractère  $\chi$  est donné par la forme linéaire  $p$ , il est noté  $\chi_p$ .

Voyons maintenant l'action d'un élément du groupe de Lorentz propre sur un caractère :

**Propriété II.3.9 (Action de  $\mathcal{L}_0$  sur  $V^*$ )**

Soit  $\chi_p \in V^*$  un caractère de  $V^*$  et  $\Lambda \in \mathcal{L}_0$  une transformation de Lorentz propre. Alors

$$\Lambda \cdot \chi_p = \chi_{\Lambda p}$$

*Démonstration* : il suffit de l'écrire :  $(\Lambda \cdot \chi_p)(x) = \chi_p(\Lambda^{-1}x) = e^{ip \cdot (\Lambda^{-1}x)} = e^{i(\Lambda p) \cdot x} = \chi_{\Lambda p}(x)$  par définition de l'action de  $\Lambda$  sur la "fonction"  $p$ .  $\square$

Comme  $V$  est de dimension finie, sa base canonique permet de l'identifier à son dual, ce qui permet d'écrire l'action d'une transformation de Lorentz sur les éléments du dual. De manière générale, quand  $p$  est considérée comme une fonction sur  $V$ , on a toujours  $p \cdot (\Lambda^{-1}x) = (\Lambda p) \cdot x$  par définition de l'action de  $\mathcal{L}_0$  sur les fonctions. Par l'isomorphisme  $V \approx V^*$ ,  $p \cdot x$  peut être vu comme un produit scalaire de vecteurs de  $V$ . Dans ce cas, l'égalité  $p \cdot (\Lambda^{-1}x) = (\Lambda p) \cdot x$  vient du fait que  $\Lambda$  conserve le produit scalaire.

Dans la suite, nous travaillerons directement avec les éléments du dual, les  $p \in V^*$ . La proposition ci-dessus montre qu'ils se comportent exactement comme les caractères sous l'action de  $\chi$ .

**Orbites, représentants, groupes d'isotropie**

Intéressons nous maintenant aux orbites des caractères. Les deux propositions ci-dessus fournissent immédiatement la réponse :

**Propriété II.3.10 (Orbite des caractères)**

Par définition, l'orbite  $\mathcal{O}_p$  du caractère  $p$  est  $\mathcal{O}_p = \mathcal{L}_0 \cdot p$ . Ses caractéristiques sont données ci-dessous en fonction de caractéristiques de  $p$  :

		$\mathcal{O}_p$
$\ p\ ^2 > 0$	$p_0 > 0$	$\{p' \in V^* \mid \ p'\ ^2 = \ p\ ^2, p'_0 > 0\}$
	$p_0 < 0$	$\{p' \in V^* \mid \ p'\ ^2 = \ p\ ^2, p'_0 < 0\}$
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 > 0$	$\{p' \in V^* \mid \ p'\ ^2 = 0, p'_0 > 0\}$
	$p_0 < 0$	$\{p' \in V^* \mid \ p'\ ^2 = 0, p'_0 < 0\}$
	$p_0 = 0$	$\{0\}$
$\ p\ ^2 < 0$		$\{p' \in V^* \mid \ p'\ ^2 = \ p\ ^2\}$

*Démonstration* : évident d'après les définitions.  $\square$

Pour former une représentation irréductible du groupe de Poincaré, il faut choisir une orbite, donc une valeur de  $\|p\|^2$ . Il est clair que cela correspond à choisir la masse de la particule. Le cas  $\|p\|^2 < 0$  correspond à des particules de masse imaginaire, les *tachyons*, que nous ne considérerons pas ici. Nous n'étudierons donc pas les représentations correspondantes.

**Définition II.3.11 (Masse)**

Soit une particule correspondant à une représentation du groupe de Poincaré construite à partir d'une orbite  $\mathcal{O}_p$  avec  $\|p\|^2 \geq 0$ . On définit sa masse par

$$m = \sqrt{\|p\|^2}$$

$\diamond$

Les orbites sont des "nappes de masse", c'est à dire un sous-ensemble de  $V^*$  d'éléments de norme au carré fixée. La nappe de masse  $m$  est notée  $M_m^+ \subset V^*$  ou  $M_m^-$ , le signe étant celui de  $p_0$ . Pour les particules, on se placera sur une nappe "+". Le cas - correspondant à des particules remontant le temps, c'est à dire des antiparticules. Néanmoins, tout ce qui sera fait se généralise aisément.

Nous allons travailler non plus avec le groupe de Lorentz propre, mais avec son revêtement  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , qui fera apparaître des sous-groupes d'isotropie dont les représentations sont connues. Nous utiliserons l'identification  $V \approx \mathbb{H}_2$  pour donner des représentants des orbites.

La proposition suivante donne pour chaque type d'orbite son représentant et le sous-groupe d'isotropie associé :

**Propriété II.3.12 (Représentant et sous-groupe d'isotropie associé)**

Pour chaque type d'orbite  $\mathcal{O}_p$ , on a le représentant et le sous-groupe d'isotropie suivants :

$\mathcal{O}_p$		représentant	sous-groupe d'isotropie
$\ p\ ^2 > 0$	$p_0 > 0$	$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$	SU(2)
	$p_0 < 0$	$\begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$	SU(2)
$\ p\ ^2 = 0$	$p_0 > 0$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	ISO(2)
	$p_0 < 0$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	ISO(2)
	$p_0 = 0$	0	SL(2, $\mathbb{C}$ )

où ISO(2) est le groupe des isométries affines de  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration* : il s'agit d'une simple vérification pour les représentants. Les sous-groupe d'isotropie se calculent à partir des représentants.

Pour  $P = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = mI$ , on cherche la condition sur  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  pour avoir  $APA^* = I$ , c'est à dire ici  $AA^* = I$ , donc  $A \in \text{SU}(2)$ . De même pour  $P = -mI$ .

Pour  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , en prenant  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2|a|^2 & 2a\bar{c} \\ 2c\bar{a} & 2|c|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc  $|a| = 1$ ,  $c = 0$ . La condition  $\det A = 1$  donne  $d = a^{-1}$ . Donc  $A$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

En regardant les règles de multiplication de telles matrices, on montre qu'il s'agit du produit semi-direct du cercle  $S^1 \approx \text{SO}(2)$  et du plan  $\mathbb{C}$ , c'est à dire des isométries ISO(2) du plan. L'action d'une rotation sur un vecteur par conjugaison donne :

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & be^{2i\theta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rotation de paramètre  $\theta$  fait tourner d'un angle  $2\theta$ .

De même pour  $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

C'est évident pour  $P = 0$ . □

Le dernier cas, correspondant à  $P = 0$ , correspond à une particule de masse nulle et d'énergie nulle. C'est simplement l'état vide, que nous n'étudierons pas en détail.

**Représentation de masse  $m > 0$** 

C'est presque terminé : il suffit de choisir une représentation irréductible du sous-groupe d'isotropie et de construire le fibré correspondant. Pour une particule de masse non nulle, le sous-groupe d'isotropie est SU(2), dont les représentations ont été données plus haut. Ces représentations pouvant être choisies unitaires, la représentation obtenue sera unitaire.

Pour la représentation  $\mathcal{D}^j$ ,  $j$  correspond clairement au spin de la particule.

**Définition II.3.13 (Spin d'une particule de masse  $m > 0$ )**

Soit une particule correspondant à une représentation du groupe de Poincaré construite à partir d'une orbite de masse non-nulle et de la représentation  $\mathcal{D}^j$  de SU(2). Alors  $j$  est le spin de la particule. ◇

Nous avons considéré au départ  $SL(2, \mathbb{C})$  à la place de  $\mathcal{L}_0$ . Si on avait considéré  $\mathcal{L}_0$ , on aurait obtenu  $SO(3)$  à la place de  $SU(2)$  comme sous-groupe d'isotropie. Or la représentation  $\mathcal{D}^j$  de  $SU(2)$  ne donne une représentation de  $SO(3)$  que si  $j \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, les représentations de spin demi-entier n'ont à priori aucun sens physique. Nous devons reconnaître que ce n'est pas le cas : des particules de spin demi-entier existent. Nous avons donc fait une erreur en prenant le groupe de Poincaré comme groupe de symétries, il fallait prendre son revêtement  $SL(2, \mathbb{C}) \rtimes H_2$ .

**Définition II.3.14 (Groupe de symétries des particules libre)**

Le groupe de symétries des particules libres est :

$$SL(2, \mathbb{C}) \rtimes H_2$$

◇

Enfin, on peut dire quel est l'espace des états d'une particule massive :

**Propriété II.3.15 (Espace des états d'une particule massive)**

Soit une particule de masse  $m > 0$  et de spin  $j$ . Considérons le fibré  $E_m^j \rightarrow M_m^+$  de fibre  $V^j$ . Son espace d'états est l'espace des sections de ce fibré :

$$\mathcal{H} = \Gamma(E_m^j)$$

*Démonstration* : c'est une conséquence immédiate de ce qui précède. □

**Représentation de masse  $m = 0$**

Dans ce cas, il faut déterminer les représentations irréductibles de  $ISO(2)$ , qui est lui-même un produit semi-direct. Par souci d'économie, nous allons éliminer directement les cas qui n'apparaissent pas dans la nature, en faisant confiance à [5].

Les caractères sont clairement identifiables aux vecteurs du plan. Pour les orbites et les sous-groupes d'isotropie, deux cas se présentent :

- Le caractère est non nul, son orbite est un cercle et son sous-groupe d'isotropie est réduit à l'identité. La représentation irréductible est la représentation triviale dans  $\mathbb{C}$ . L'espace de représentation associée est l'espace des fonctions sur le cercle. Nous admettons que ces représentations n'apparaissent pas dans la nature.
- Le caractère est nul, son orbite est le caractère nul et son sous-groupe d'isotropie est  $SO(2)$ . Les représentations irréductibles de  $SO(2)$  sont de dimension un. Une telle représentation est caractérisée par  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $e^{i\theta}$  étant représenté par une rotation d'angle  $n\theta$  :  $\theta \mapsto e^{in\theta}$ .

On a vu plus haut que le paramètre  $\theta = \frac{\phi}{2}$  correspondait à une rotation d'angle  $2\theta = \phi$  (alors  $0 \leq \phi \leq 4\pi$ ). On pose donc  $n = 2s$ ,  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ , et on note cette représentation  $\mathcal{B}^s$ .  $s$  va clairement jouer le rôle de l'hélicité.

Pour avoir une représentation de  $ISO(2)$ , il faudrait prendre les sections du fibré de base le caractère nul et de fibre  $\mathbb{C}$ , mais cet espace est isomorphe à  $\mathbb{C}$ .

Ces représentations sont bien sûr unitaires.

**Définition II.3.16 (Spin (ou hélicité) d'une particule de masse  $m = 0$ )**

Soit une particule correspondant à une représentation du groupe de Poincaré construite à partir d'une orbite de masse nulle et de la représentation  $\mathcal{B}^s$  de  $ISO(2)$ . Alors  $s$  est le spin (ou l'hélicité) de la particule. ◇

Comme pour les particules massives, on a :

**Propriété II.3.17 (Espace des états d'une particule de masse nulle)**

Soit une particule de masse  $m = 0$  et de spin  $s$ . Considérons le fibré  $E_0^s \rightarrow M_0^+$  de fibre  $\mathbb{C}$ . Son espace d'états est l'espace des sections de ce fibré :

$$\mathcal{H} = \Gamma(E_0^s)$$

*Démonstration* : c'est une conséquence immédiate de ce qui précède. □

## II.4 Conclusion

Nous avons obtenu une classification des particules. La première grandeur caractéristique est leur masse  $m \in \mathbb{R}_+$ . Pour les particules massives ( $m > 0$ ), une deuxième grandeur est nécessaire pour les caractériser : leur spin  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ . Pour les particules de masse nulle ( $m = 0$ ), l'hélicité (ou spin)  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  est la deuxième grandeur qui les caractérise.

L'espace des états est l'espace des sections d'un fibré qui dépend des caractéristiques de la particule. Les caractéristiques du fibré sont résumées dans le tableau suivant :

masse	spin	base	fibre (dimension)
$m > 0$	$j$	$M_m^+$	$V^j (2j + 1)$
$m = 0$	$s$	$M_0^+$	$\mathbb{C} (1)$

# Chapitre III

## Théorie relativiste des champs

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les outils introduits au chapitre précédent, à savoir les espaces des états des particules. Sachant que les particules étaient des représentations irréductibles du groupe de Poincaré, nous ne disposons pas d'un espace des états explicite nous permettant de faire des calculs. C'est maintenant le cas.

Dans un premier temps, nous verrons comment interpréter ces espaces d'états et les relier à la représentation intuitive de l'état d'un système par un champ (spinoriel, tensoriel, ...) en position.

De ces liens entre les deux représentations des états d'une particule nous déduirons une méthode pour déterminer des équations d'évolution pour le champ en position qui seront, par construction, invariantes sous l'action du groupe de Poincaré. Enfin, nous appliquerons cette méthode aux cas classiques : champ scalaire et équation de Klein-Gordon, champ spinoriel et équation de Dirac, équations de Maxwell et particule associée.

La démarche qui suit est empruntée à [5].

### III.1 Champs en position, en impulsion

#### III.1.1 Définition des champs

Nous allons rapidement définir ce que nous appelons champ en position ou en impulsion.

**Définition III.1.1 (Champ en position)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Un champ en position est une application :

$$\psi : V \rightarrow E$$

Cette application peut aussi être vue comme une section du fibré trivial  $V \times E \rightarrow V : \psi \in \Gamma(V \times E)$ .  $\diamond$

Plus généralement, cette application peut être une distribution, comme nous le verrons plus loin.

En pratique, l'espace vectoriel de dimension finie sera un espace de représentation du groupe de Lorentz, pour indiquer comment une transformation de Lorentz fait "tourner" le champ.

L'approche lagrangienne de la mécanique nous apprend que l'impulsion est le moment conjugué de la position, ce qui implique que l'impulsion appartient à l'espace dual de la position, c'est à dire à  $V^*$ . L'interprétation de  $p \in V^*$  comme une impulsion est cohérente avec ce que nous avons vu dans le chapitre précédent : pour une particule donnée,  $\|p\|^2$  est fixée à  $m^2$ , où  $m$  est la masse de la particule. La définition d'un champ en impulsion est exactement analogue à celle d'un champ en position :

**Définition III.1.2 (Champ en impulsion)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Un champ en impulsion est une application :

$$\varphi : V^* \rightarrow E$$

Cette application peut aussi être vue comme une section du fibré trivial  $V^* \times E \rightarrow V^* : \varphi \in \Gamma(V^* \times E)$ .  $\diamond$



Nous avons vu qu'un état pouvait être représenté par une section d'un fibré de base  $M_m^+ \subset V^*$ , c'est à dire par un champ en impulsion. La fibre du fibré correspond à l'espace d'arrivée des champs.

Nous allons maintenant voir en quoi les champs sont reliés, en commençant par le cas le plus simple, c'est à dire par des champs scalaires.

### III.1.2 Transformée de Fourier

Considérons une particule décrite par les champs scalaires  $\psi : V \rightarrow E$  et  $\varphi : V^* \rightarrow E$ . A priori, chacun des deux champs suffit à décrire l'état de la particule, on doit donc être capable de relier l'un à l'autre. Les ondes planes et l'écriture d'un champ en position comme paquet d'ondes font ressortir ce qui relie les deux : la transformation de Fourier.

Nous allons donner la définition de la transformée de Fourier pour les fonctions, bien que nous l'utiliserons en fait pour les distributions. La définition donnée est spécifique aux espaces que nous considérons :  $V$  et  $V^*$ .

#### Définition III.1.3 (Transformation de Fourier)

Deux champs scalaires  $\psi : V \rightarrow E$  et  $\varphi : V^* \rightarrow E$  sont reliés par transformée de Fourier si et seulement si

$$\begin{aligned}\psi(x) &= (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ip \cdot x} \varphi(p) d^4p \\ \varphi(p) &= (\mathcal{F}\psi)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ip \cdot x} \psi(x) d^4x\end{aligned}$$

On postule que c'est le cas si ils décrivent le même état d'une particule.  $\diamond$

On utilisera, sans les démontrer, des propriétés usuelles de la transformée de Fourier, comme le fait que c'est une isométrie ou que  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \text{id}$ .

Nous avons des informations sur les champs en impulsion des particules élémentaires : par exemple, ils sont à support dans une "nappe de masse"  $M_m^+$ . Cette information peut être traduite par transformée de Fourier en une information sur les champs en position. Nous avons pour cela besoin d'une propriété bien connue de la transformée de Fourier :

#### Propriété III.1.4

Si  $\mathcal{F}\psi = \varphi$ , alors  $\mathcal{F}(\partial_\mu \psi) = ip_\mu \varphi$ .

*Démonstration* : il s'agit d'une simple intégration par parties.  $\square$

### III.1.3 Généralisation

#### Inclusion du fibré de départ dans un fibré trivial

Dans le cas général, les champs en impulsion sont des sections d'un fibré  $F \rightarrow M$  (où  $M = M_m^+$ ) et non de simples fonctions. Nous ne pouvons donc pas prendre leur transformée de Fourier avec la définition que nous venons d'en donner. Pour pouvoir prendre leur transformée de Fourier, il faut inclure le fibré  $F \rightarrow M$  dans un fibré trivial  $F' = M \times W \rightarrow M$  dans lequel les sections sont des fonctions  $M \rightarrow W$ . Utilisant alors  $M \subset V^*$ , nous pouvons inclure  $F' \subset V^* \times W$ . Cette liste d'inclusions se résume dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F \hookrightarrow F' = M \times W & \hookrightarrow & V^* \times W \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ M & & V^* \end{array}$$

On associe donc à une section du fibré  $F$  un champ en impulsion :

$$\sigma \in \Gamma(F) \mapsto (\varphi : V^* \rightarrow W)$$

On applique ensuite la transformée de Fourier inverse pour obtenir le champ en position

$$\psi = (\mathcal{F}^{-1}\varphi) : V \rightarrow W$$

### Déduction des équations d'évolution

Il est maintenant facile (du moins en théorie) d'obtenir des équations différentielles vérifiées par  $\psi$ . En effet, le fait que le champ en impulsion  $\varphi$  soit issu d'une section donne des relations naturellement vérifiées par ce champ. Via la transformée de Fourier inverse, ces relations deviennent des équations différentielles vérifiées par  $\psi$ .

## III.2 Application aux cas classiques

### III.2.1 Champ scalaire et équation de Klein-Gordon

Considérons une particule de masse  $m$  et de spin nul. Cette dernière condition implique que la représentation du sous-groupe d'isotropie choisie est la représentation triviale. L'espace des états est donc l'espace des sections du fibré  $E_m^+ = M_m^+ \times \mathbb{C}$ , c'est à dire les fonctions  $f : M_m^+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Suivant la démarche précédente, il faut considérer  $f$  comme une fonction sur  $V^* \supset M_m^+$  : il suffit de multiplier cette fonction par la distribution de Dirac  $\delta_{M_m^+}$  associée à la nappe  $M_m^+$ . Cette distribution est simplement donnée par  $\delta_{M_m^+}(p) = \delta(\|p\|^2 - m^2)$ , où  $\delta$  est la distribution de Dirac définie sur  $\mathbb{R}$ . Ceci se résume :

$$\left( f \left\{ \begin{array}{l} M_m^+ \rightarrow \mathbb{C} \\ p \mapsto f(p) \end{array} \right. \right) \mapsto \left( \varphi \left\{ \begin{array}{l} V^* \rightarrow \mathbb{C} \\ p \mapsto \varphi(p) = f(p)\delta(\|p\|^2 - m^2) \end{array} \right. \right)$$

Il est maintenant facile de trouver la condition vérifiée par  $\varphi$  et provenant de sa définition :

$$(\|p\|^2 - m^2)\varphi(p) = 0 \quad \forall p \in V^*$$

Il ne reste qu'à appliquer la transformation de Fourier pour aboutir à la proposition suivante, où on utilise l'opérateur d'alembertien  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ .

#### **Propriété III.2.1 (Equation de Klein-Gordon)**

Une particule de masse  $m$  et de spin  $j = 0$  est décrite par une fonction d'onde (ou champ en position)  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2)\psi = 0$$

*Démonstration* : il suffit de calculer  $0 = \mathcal{F}^{-1}((\|p\|^2 - m^2)\varphi(p))$ . □

On remarque que cette équation pourrait être déduite de l'équation  $E^2 = m^2 + p^2$ , directement issue de la relativité restreinte, par le principe de correspondance. La méthode que nous avons utilisé ici est cependant plus élégante et moins "manuelle".

### III.2.2 Champ spinoriel et équation de Dirac

Passons maintenant au cas de la particule massive ( $m > 0$ ) et de spin  $j = \frac{1}{2}$ . Son état est décrit par une section du fibré  $E_m^{\frac{1}{2}} \rightarrow M_m^+$ . Nous n'allons pas partir de ce fibré, mais construire directement le fibré trivial final :  $V^* \times \mathbb{C}^4 \rightarrow V^*$ . Pour cela, nous allons introduire une représentation de  $SL(2, \mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}^4$ . Nous utiliserons ensuite une conséquence du théorème de réciprocity de Frobenius permettant d'identifier les fonctions  $M_m^+ \rightarrow \mathbb{C}^4$  aux sections du fibré. Ceci donnera des conditions sur les fonctions et permettra d'obtenir l'équation de Dirac.

#### **Construction de la représentation de $SL(2, \mathbb{C})$**

On construit aussi le morphisme de groupes  $\tau$  :

$$\tau : A \in SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

On a ainsi obtenu une représentation de  $SL(2, \mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}^4$ .

On note  $\rho$  la restriction de  $\tau$  à  $SU(2)$  :  $\rho = \tau|_{SU(2)}$ . Alors, pour  $A \in SU(2)$ ,

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Revenons à ce que nous avons vu précédemment :  $SU(2)$  agissant sur  $\mathbb{C}^2$  fournit une représentation de  $SU(2)$ , de dimension 2 et clairement irréductible. Cette représentation est donc isomorphe à la représentation de  $\text{spin } \frac{1}{2}$  :  $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$ . Donc  $\rho$  est la somme de deux de ces représentations :  $\rho = \mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$ .

On avait introduit  $E_m^{\frac{1}{2}}$  comme le fibré induit par la représentation  $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$  de  $SU(2)$ . On peut aussi induire un fibré à partir de la représentation  $\rho$  de  $SU(2)$ , que l'on note  $E_\rho$ . On a alors  $E_\rho = E_m^{\frac{1}{2}} \oplus E_m^{\frac{1}{2}}$  en sommant les fibres (schématiquement, cela revient à écrire  $(M \times W) \oplus (M \times W') = M \times (W \oplus W')$ ).

La transposée de la comatrice de  $P$  sera notée  $P^a$ . On sait que  $PP^a = (\det P)I$ . A  $P \in H_2$ , on associe une matrice  $4 \times 4$  par :

$$\gamma : P = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 + ip_2 \\ p_1 - ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} \mapsto \gamma(P) = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^a & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors  $\gamma(P)^2 = \|P\|^2 I$ .

On vérifie la formule suivante, pour  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  et  $P \in H_2$  :

$$\gamma(APA^*) = \tau(A)\gamma(P)\tau(A)^{-1}$$

### Equation sur le champ en impulsion et sections du fibré $E_m^{\frac{1}{2}}$

Considérons maintenant l'équation

$$\gamma(p)\varphi(p) = m\varphi(p)$$

portant sur la fonction d'onde en impulsion  $\varphi : V^* \rightarrow \mathbb{C}^4$ . Montrons que les solutions de cette équation sont les sections du fibré  $E_m^{\frac{1}{2}} \rightarrow M_m^+$ .

Commençons par montrer que le support d'une solution de cette équation est contenu dans la nappe  $M_m^+$ . En multipliant cette équation par  $\gamma(p)$ , on trouve  $(\|p\|^2 - m^2)\varphi(p) = 0$ . On admet que ceci implique que  $\varphi$  est de la forme<sup>1</sup> :

$$\varphi = f\delta_{M_m^+}$$

$f : M_m^+ \rightarrow \mathbb{C}^4$  est une application, que l'on veut identifier à une section du fibré  $E_\rho$ . Nous allons utiliser le résultat suivant, provenant du théorème de réciprocity de Frobenius :

#### **Théorème III.2.2**

Soit  $G$  un groupe et  $H \subset G$  un sous-groupe. Soit  $(\tau, V)$  une représentation de  $G$  dont la restriction à  $H$  est  $(\rho = \tau|_H, V)$ . Soit  $\Gamma(E)$  l'espace des sections du fibré  $E \rightarrow M$  induit par la représentation  $(\rho, V)$  au groupe  $G$ . On a alors un isomorphisme

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\xi} \mathcal{F}(M, V)$$

Si  $\sigma \in \Gamma(E)$  est donnée par  $\sigma(gH) = [(g, s(g))]$ , la fonction  $f = \xi\sigma$  associée est

$$f(gH) = (\xi\sigma)(gH) = \tau(g)s(g)$$

Et  $G$  agit sur cette fonction par

$$(k \cdot f)(gH) = \tau(k)f(k^{-1}gH)$$

Démonstration : admis. □

<sup>1</sup>Ceci montre seulement que  $\varphi$  est une distribution à support dans  $M_m^+$ , mais elle pourrait aussi contenir des dérivées de la distribution de Dirac ...

Il est maintenant possible d'identifier  $f$  avec une section  $\sigma \in \Gamma(E_\rho)$ . Choisissons le représentant de l'orbite :

$$P = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

La section est de la forme : ( $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ )

$$\sigma \left( A \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} A^* \right) = [(A, s(A))]$$

Alors d'après le théorème précédent, la fonction  $f$  est donnée par

$$f \left( A \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} A^* \right) = \tau(A)s(A)$$

En injectant cette formule pour  $f$  dans l'équation vérifiée par  $f$  et en utilisant ce qui a été vu pour  $\gamma$ , on calcule :

$$\begin{aligned} \gamma \left( A \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} A^* \right) f \left( A \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} A^* \right) &= \tau(A)\gamma \left( \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right) \tau(A)^{-1} \tau(A)s(A) \\ &= \tau(A)\gamma \left( \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right) s(A) \\ &= m\tau(A)s(A) \end{aligned}$$

Après multiplication par  $\tau(A)^{-1}$  et utilisation de la définition de  $\gamma$ , on trouve

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} (A) = m \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} (A)$$

on peut donc définir

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} (A) = \begin{pmatrix} s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} (A)$$

Donc  $s$  est dans le fibré diagonal  $s = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix}$ , avec  $\phi$  définissant une section de  $E_m^{\frac{1}{2}}$ .

Pour résumer, nous avons montré que les solutions de l'équation imposée à  $f$  pouvaient être identifiées aux sections du fibré décrivant le type de particules qui nous intéresse.

Il nous donc à prendre la transformée de Fourier inverse de l'équation vérifiée par  $\varphi$ . Ecrivant  $p = p_\mu e^\mu$ , où  $(e^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$  est la base canonique de  $V^*$ , on pose  $\gamma^\mu = \gamma(e^\mu)$ . On a alors  $\gamma(p) = p_\mu \gamma^\mu$  et l'équation vérifiée par  $\varphi$  s'écrit

$$\gamma^\mu p_\mu \varphi(p) = m\varphi(p)$$

### **Propriété III.2.3 (Equation de Dirac)**

Une particule de masse  $m > 0$  et de spin  $j = \frac{1}{2}$  est décrite par une fonction d'onde  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^4$  qui vérifie l'équation de Dirac :

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - im)\psi = 0$$

*Démonstration* : d'après ce qui précède. □

## **III.2.3 Equations de Maxwell et photons**

Jusqu'à maintenant, nous sommes partis des particules et, connaissant leurs caractéristiques, nous avons déduit des équations vérifiées par leur fonction d'onde. Ceci correspondait avec la démarche historique. Le cas des équations de Maxwell est différent : les équations d'évolution du champ électromagnétique ont été connues bien avant que la notion de photon fasse son apparition. La démarche naturelle est alors inverse : partant des équations de Maxwell, nous allons essayer de remonter aux caractéristiques de la particule correspondante, le photon.

### Equations et transformée de Fourier

Dans la formulation relativiste de l'électromagnétisme, le champ électromagnétique est décrit par une 2-forme linéaire alternée (qui correspond à la fonction d'onde de la particule que nous cherchons à identifier)  $\omega : V \rightarrow \bigwedge^2(V^*) = W$ . Les équations de Maxwell sans sources (vérifiées par la fonction d'onde de la particule libre) sont :

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 \\ d*\omega &= 0 \end{aligned}$$

Prenons la transformée de Fourier de cette fonction d'onde en position pour obtenir la fonction d'onde en impulsion, sur laquelle on travaillera ensuite :  $\varphi = \mathcal{F}\omega : V \rightarrow W$ . Un raisonnement classique avec les transformées de Fourier permet de montrer que  $\varphi$  vérifie :

$$\begin{aligned} p \wedge \varphi(p) &= 0 \\ p \wedge *\varphi(p) &= 0 \end{aligned}$$

### Masse du photon

Utilisons les équations vérifiées par  $\varphi$  pour déterminer la masse du photon. Si  $p \neq 0$ , l'équation  $p \wedge \varphi(p) = 0$  montre qu'il existe  $a(p) \in V^*$  tel que

$$\varphi(p) = p \wedge a(p)$$

Cette relation reste vraie si on remplace  $a(p)$  par  $a(p) + \lambda p$ .

Montrons maintenant que si  $\varphi(p) \neq 0$ , alors  $p \wedge *\varphi(p) = 0$  implique  $\|p\|^2 = 0$ . Par l'absurde, si  $\|p\|^2 \neq 0$ , on peut remplacer  $a(p)$  par

$$a'(p) = a(p) - \frac{a(p) \cdot p}{\|p\|^2} p$$

afin d'avoir  $a'(p) \cdot p = 0$ . On peut alors normaliser le système libre  $(p, a'(p))$  et le compléter en une base orthonormale  $(e^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$  de  $V^*$  pour avoir  $p = r e^\mu$  et  $a'(p) = s e^\nu$  (avec  $\mu \neq \nu$ ). Alors  $p \wedge a'(p) = r s e^\mu \wedge e^\nu$ , donc  $*(p \wedge a'(p)) = \pm r s e^\rho \wedge e^\sigma$  (avec  $\rho \notin \{\mu, \nu\}$  et  $\sigma \notin \{\mu, \nu, \rho\}$ ). Alors  $0 = p \wedge *\varphi(p) = p \wedge *(p \wedge a'(p)) = \pm r^2 s e^\mu e^\rho e^\sigma \neq 0$  : absurde. Donc si  $\varphi(p) \neq 0$ ,  $\|p\|^2 = 0$ , ce qui s'écrit aussi

$$\|p\|^2 \varphi(p) = 0$$

Ceci signifie que le photon a une masse nulle. Ce que l'on vient de montrer est extraordinaire : le fait que le photon ait une masse nulle explique le fait que la lumière se propage à la vitesse ... de la lumière !

### Spin du photon

Nous venons de voir que  $\varphi$  vérifiait  $\|p\|^2 \varphi(p) = 0$ . Nous avons déjà utilisé plus haut le fait que cela impliquait que  $\varphi$  pouvait se mettre sous la forme :

$$\varphi(p) = f(p) \delta(\|p\|^2)$$

avec  $f : M_0^+ \rightarrow W$ . Mais la fonction  $f$  doit encore vérifier les conditions qui portaient sur  $\varphi$  :  $p \wedge f(p) = 0$  et  $p \wedge *f(p) = 0$ .

$f$  est une section du fibré trivial  $M_0^+ \times W \rightarrow M_0^+$ . Nous suivons en fait le raisonnement inverse du précédent : nous cherchons un fibré  $E \subset M_0^+ \times W$  tel que les conditions sur  $f$  reflètent la possibilité d'identifier  $f$  à une section de ce fibré. Or les conditions sur  $f$  se traduisent directement en conditions sur le fibré  $E$  : elles donnent la forme de la fibre au-dessus de  $p$ ,  $E_p \subset W$ , caractérisée par

$$(\alpha \in E_p) \iff \begin{cases} p \wedge \alpha = 0 \\ p \wedge *\alpha = 0 \end{cases}$$

Il faut maintenant identifier ce fibré avec un fibré correspondant à une représentation irréductible du groupe de Poincaré. D'après ce que nous avons vu pour la construction des

représentations d'un produit semi-direct, une fois la base du fibré connu, il suffit d'identifier la représentation du sous-groupe d'isotropie d'un représentant de la base pour connaître le fibré. Un représentant de l'orbite  $M_0^+$  est donné par

$$k = e^0 + e^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le groupe d'isotropie de cet élément a déjà été calculé : il est constitué des matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Nous allons voir comment ces matrices agissent sur  $\alpha \in E_k$ . Pour cela, déterminons la forme de  $\alpha$  vérifiant  $k \wedge \alpha = 0$  et  $k \wedge * \alpha = 0$ . Alors  $\alpha = (e^0 + e^3) \wedge (r(e^0 - e^3) + x_1 e^1 + x_2 e^2) = -2r e^0 \wedge e^3 + (e^0 + e^3) \wedge (x_1 e^1 + x_2 e^2)$ . Ensuite  $*\alpha = -2r e^1 \wedge e^2 + (e^0 + e^3) \wedge (x_1 e^2 - x_2 e^1)$ . La condition  $k \wedge * \alpha = (e^0 + e^3) \wedge * \alpha = 0$  donne directement  $r = 0$ . On a donc la forme générale de  $\alpha \in E_k$  :

$$\alpha = (e^0 + e^3) \wedge (x_1 e^1 + x_2 e^2)$$

Pour déterminer l'action de  $A$  sur  $\alpha$ .  $A$  agit naturellement sur  $V^*$ , et l'action de  $A$  sur  $V^* \otimes V^*$  est définie par  $A \cdot (x, y) = (Ax, Ay)$ . Cette action passe bien sûr au quotient et l'action de  $A$  sur  $\bigwedge^2(V^*)$  est bien définie. Comme  $\alpha$  s'écrit sous la forme  $\alpha = k \wedge l$ , on a  $A\alpha = (Ak) \wedge (Al) = k \wedge (Al)$ . Il faut donc calculer  $Al$  :

$$\begin{aligned} A(x_1 e^1 + x_2 e^2) &= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & b \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ \bar{b} & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y & e^{2i\theta}(x_1 + ix_2) \\ e^{-2i\theta}(x_1 - ix_2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $y$ , disparaissant dans le produit extérieur avec  $k$ , n'est pas calculé. Finalement,

$$A\alpha = (e^0 + e^3) \wedge R_{2\theta}(x_1 e^1 + x_2 e^2)$$

où  $R_{2\theta}$  est la rotation d'angle  $2\theta$  autour de  $e^3$ . On a montré que la fibre de  $E$  était de dimension 2 et que la matrice  $A(\theta, b)$  agissait sur cette fibre par rotation d'angle  $2\theta$ . Cette représentation n'est pas irréductible dans  $\mathbb{C}^{22}$ , et les valeurs propres de  $R_{2\theta}$  sont  $e^{2i\theta}$  et  $e^{-2i\theta}$ . Les représentations de  $\text{ISO}(2)$  mises en jeu ici sont donc les représentations  $\mathcal{B}^1$  et  $\mathcal{B}^{-1}$ . Le fibré  $E$  est donc

$$E = E_0^1 \oplus E_0^{-1}$$

#### **Propriété III.2.4 (Caractéristiques du photon)**

*Le photon, associé au champ électromagnétique, est une particule de masse nulle et de spin  $s = \pm 1$ .*

*Démonstration* : d'après ce qui précède. □

### III.3 Problèmes non abordés ici

Nous allons nous arrêter succinctement sur des questions qui ne sont pas l'objet d'étude que nous avons faite, mais qui y sont fortement liés et qu'il aurait été intéressant d'aborder.

#### III.3.1 Structure d'espace de Hilbert

De manière générale en physique quantique, l'espace des états doit être un espace de Hilbert. Nous avons simplement obtenu un espace vectoriel, mais nous n'avons pas évoqué la question du produit scalaire. Nous sommes en présence d'applications entre espaces normés de dimension finie, le produit scalaire naturel sur ce genre d'espace est le produit  $L^2$ . On a pour cela besoin de normer l'espace d'arrivée et de mesurer l'espace de départ. Il est commode de munir l'espace d'arrivée du

<sup>2</sup>On savait déjà que pour les particules de masse nulle, les fibres sont toujours  $\mathbb{C}$ .

produit scalaire qui rend la représentation du sous-groupe d'isotropie unitaire. L'espace de départ peut être soit  $V^*$ , soit une nappe de masse. Dans le cas de  $V^*$ , la mesure de Lebesgue convient parfaitement. Dans le cas d'une nappe de masse, il faut introduire une mesure superficielle sur cette sous-variété à partir de la mesure de Lebesgue sur l'espace ambiant. Il est facile de déterminer explicitement cette mesure (ceci est fait dans [5]).

Une fois que l'espace est normé, on peut parler de représentation unitaire. En effet, au départ, nous avons prévu de ne nous intéresser qu'aux représentations unitaires. Or nous n'avons pas vérifié que les représentations avec lesquelles nous avons travaillé l'étaient. Il est possible de montrer qu'en partant de représentations unitaires pour le sous-groupe d'isotropie, on obtient bien des représentations unitaires du produit semi-direct.

### III.3.2 Observables

Lors de notre étude préliminaire du groupe de Poincaré, nous avons calculé son algèbre de Lie et exhibé ses opérateurs de Casimir. Il serait intéressant de se demander ce que sont devenus ces opérateurs avec nos représentations explicites. Comment les éléments de l'algèbre de Lie agissent sur les fonctions d'onde, à quelles actions correspondent les opérateurs de Casimir, quels sont les états propres des différents opérateurs.

Il faut aussi vérifier que les grandeurs caractérisant les représentations sont bien les mêmes (à quelques ajustements près) dans les deux cas.

### III.3.3 Formalisme Lagrangien

Dans le premier chapitre, nous avons introduit le groupe de symétries comme le groupe de symétries de l'action. Il serait intéressant d'essayer de définir un lagrangien à partir des champs dont nous disposons, et de montrer que le groupe de Poincaré (ou plutôt son revêtement) réapparaît bien comme le groupe de symétries de l'action.

Les lagrangiens correspondant à l'équation de Klein-Gordon, à l'équation de Dirac et aux équations de Maxwell sont donnés dans [4, 6].

# Chapitre IV

## Introduction à la théorie quantique des champs

La théorie relativiste des champs que nous venons de présenter admet une généralisation presque immédiate, et surtout à la base de tous les calculs modernes de physique des particules. Il serait dommage de ne pas présenter le point de départ de cette théorie, qui s'inscrit dans la continuité de ce que nous avons fait.

Le problème de l'étude des interactions nous conduira naturellement à introduire le formalisme de la théorie quantique des champs.

### IV.1 Problème des interactions entre particules

Pour l'instant, nous ne nous sommes intéressés qu'à des particules libres. Nous avons déterminé leur espace d'états et les équations qui régissaient leur fonction d'onde. Maintenant que nous savons assez bien décrire les particules libres, il est naturel de s'intéresser aux interactions entre ces particules. Nous n'allons pas essayer de décrire ces interactions de manière explicite, nous allons seulement étudier, par un raisonnement très général, deux manières différentes de représenter ces interactions.

Dans la suite, nous allons nous placer dans le cas de particules identiques, mais le raisonnement que nous allons suivre se généralise très facilement.

#### Espace d'états

Considérons  $n$  particules identiques. D'après les chapitres précédents, nous connaissons l'espace d'états  $\mathcal{H}$  d'une particule. L'espace d'états de  $n$  particules identiques qu'il est le plus logique de prendre est l'espace

$$\mathcal{H}_n = \otimes^n \mathcal{H}$$

En notant l'état d'une particule  $\psi \in \mathcal{H}$ , un état du système de  $n$  particules sera

$$\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathcal{H}_n$$

#### Description des interactions

Introduire une interaction entre les particules revient à relier leurs états par une "équation". Nous avons vu que si l'espace d'états était bien choisi, aucune équation n'était nécessaire pour décrire le mouvement des particules libres. Rajouter une interaction revient à modifier l'espace des états, ce qui ne semble pas très facile à faire de manière générale et naturelle : modifier un espace n'est pas une façon très simple d'introduire une interaction.

Considérons le point de vue plus intuitif des fonctions d'onde. Il est facile d'introduire une interaction entre les particules : il suffit de coupler les équations qui régissent leur fonction d'onde.



### Limites de cette démarche

Deux objections, d'ordre très différent, peuvent être faites à cette méthode. La première est purement pratique : tout ce que nous allons faire dépendra du nombre de particules et il sera difficile de donner des équations générales pour un nombre quelconque de particules. Le problème ne fera qu'augmenter avec les cas où des particules différentes interagissent.

La deuxième, beaucoup plus grave, est d'ordre physique : cette méthode ne nous permettra d'étudier que des cas où le nombre et le type des particules est conservé. Or un grand nombre d'interactions se manifeste par des annihilations ou des destructions de particules. On aura donc besoin d'un formalisme permettant de traiter un nombre variable de particules, ce qui sera le cas de la théorie quantique des champs.

## IV.2 Espaces et opérateurs de base

### Espace de Fock

Il est facile de construire un espace adapté à la description d'un nombre variable de particules. Si  $\mathcal{H}$  est l'espace d'états d'une particule libre, l'espace d'états d'un système comportant un nombre variable de copies de cette particule est simplement l'algèbre tensorielle de  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H}^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$$

Le sous espace  $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}^*$  correspond à des états à  $n$  particules.

Cet espace est toutefois un peu trop gros : il contient plusieurs fois les mêmes états. En effet, comme les particules sont identiques, une permutation des fonctions d'onde dans un produit tensoriel doit donner, au signe près (ceci vient évidemment de la nature des particules : bosons ou fermions), le même état. L'action du groupe  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathcal{H}_n$  est donnée par, pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\psi \in \mathcal{H}_n$  :

$$\sigma \cdot (\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) = \psi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\sigma(n)}$$

D'après le principe de Pauli, on sait que

$$\sigma \cdot \psi = \lambda_\sigma \psi$$

où  $\lambda_\sigma = 1$  si il s'agit de bosons,  $\lambda_\sigma = \epsilon(\sigma)$  si il s'agit de fermions.

On peut effectuer le quotient  $\mathcal{H}_n / \mathfrak{S}_n$  pour obtenir des états non dédoublés. En sommant sur  $n$ , on obtient l'espace de Fock :

#### **Définition IV.2.1 (Espace de Fock)**

Soit  $\mathcal{H}$  l'espace d'états d'une particule. L'espace de Fock, adapté à la description d'un nombre variable de copies de cette particule, est défini par

$$\mathcal{H}_F = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n / \mathfrak{S}_n$$

◇

### Base

Nous allons construire, à partir d'une base de l'espace de départ  $\mathcal{H}$ , une base de l'espace de Fock  $\mathcal{H}_F$ . Soit  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$ . Une base de  $\mathcal{H}_n$  peut en être déduite : il s'agit simplement de la base suivante, qui est aussi une base hilbertienne :

$$\left( \bigotimes_{k=1}^n \phi_{i_k} \right)_{(i_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{N}^n}$$

En prenant la réunion sur  $n$  de ces familles, on obtient ainsi une base de  $\mathcal{H}^*$ .

Pour obtenir une base de  $\mathcal{H}_F$ , il suffit de regrouper les vecteurs équivalents de la base que l'on vient de donner :

**Définition IV.2.2 (Base en nombres d'occupation)**

Si  $\phi = \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n \in \mathcal{H}_n$ , on pose

$$|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \mathfrak{S}_n \cdot (\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) \in \mathcal{H}_n / \mathfrak{S}_n$$

$n_i$  est alors le nombre de fois que  $\phi_i$  apparaît dans  $\phi$ . On a  $\sum_{i \in \mathbb{N}} n_i = n$ .

La famille suivante est une base hilbertienne de  $\mathcal{H}_F$  :

$$(|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle)_{\sum_{i \in \mathbb{N}} n_i < \infty}$$

◇

On obtient une base hilbertienne car les vecteurs de la base de  $\mathcal{H}_n$  étaient équivalents ou orthogonaux.

**Opérateurs annihilation, création et comptage**

Ces opérateurs ont été définis pour l'oscillateur harmonique. Ici, il existe un de ces opérateurs par élément de la base hilbertienne. Ils correspondent aux opérations suivantes :

- l'opérateur annihilation  $a_i$  détruit une particule dans l'état  $\phi_i$ ,
- l'opérateur création  $a_i^\dagger$  crée une particule dans l'état  $\phi_i$ ,
- l'opérateur comptage  $N_i$  compte le nombre de particules dans l'état  $\phi_i$ .

Nous donnons ici leur définition dans la base définie au-dessus :

**Définition IV.2.3 (Opérateurs annihilation, création et comptage)**

L'opérateur annihilation  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  est défini par :

$$a_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle$$

Son adjoint, l'opérateur création  $a_i^\dagger$ , vaut donc :

$$a_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle$$

Enfin, on introduit l'opérateur comptage

$$N_i = a_i^\dagger a_i$$

◇

Les opérateurs  $a_i$  et  $a_i^\dagger$  correspondent à l'intuition, aux facteurs  $\sqrt{n_i}$  et  $\sqrt{n_i + 1}$  près. Ces facteurs sont justifiés à posteriori par les deux calculs suivants. Un calcul direct donne

$$[a_i, a_i^\dagger] = \mathbf{1}$$

La définition de l'opérateur  $N_i$  se justifie en calculant :

$$\langle n_1, \dots, n_i, \dots | N_i | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle = n_i$$

Enfin, l'opérateur de comptage de toutes les particules peut être défini par

$$N = \sum_{i \in \mathbb{N}} N_i$$

**IV.3 Retour aux fonctions d'onde****Du vecteur d'état à l'opérateur, seconde quantification**

A l'état d'une particule  $\phi_i$  de la base hilbertienne de  $\mathcal{H}$ , nous avons associé les opérateurs de l'espace de Fock  $a_i$  et  $a_i^\dagger$  qui permettaient de détruire ou de créer une particule correspondant à cet état. Considérons l'application linéaire

$$\Theta : \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow & \text{End}(\mathcal{H}_F) \\ \phi_i & \mapsto & a_i \end{cases}$$

Elle est bien définie par l'image d'une base. On peut aussi écrire  $\Theta = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \langle \phi_i |$ .

Soit  $\psi \in \mathcal{H}$  un état à une particule, alors  $\Psi = \Theta(\psi)$  est l'opérateur "annihilation d'une particule de fonction d'onde  $\psi$ ". De la même manière, on a  $\Psi^\dagger$  et  $N_\psi$ .

Nous admettrons que ces opérateurs ont les effets attendus et nous ne détaillerons pas plus les calculs.

Ce procédé, associant à un état de l'ancien espace un opérateur sur le nouvel espace d'états est souvent appelé *quantification*. La *première quantification* consiste à partir de la position et de l'impulsion, servant à décrire l'état d'une particule et de leur associer des opérateurs sur le nouvel espace d'état : l'espace des fonctions d'onde. Ici, nous avons réalisé la *seconde quantification*, en associant à des fonctions d'onde un opérateur sur l'espace de Fock.

### Point de vue de Heisenberg

Il existe deux façons équivalentes de voir un système quantique. Avec le point de vue de Schrödinger, les observables sont des opérateurs constants et les états évoluent dans le temps :

$$\langle O(t) \rangle = \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle$$

avec, si  $H$  est l'hamiltonien du système,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-itH} |\psi(0)\rangle$$

Avec le point de vue de Heisenberg, les observables dépendent du temps et les états sont constants :

$$\langle O(t) \rangle = \langle \psi | O(t) | \psi \rangle$$

La condition d'équivalence des deux points de vue donne

$$O(t) = e^{itH} O(0) e^{-itH}$$

On remarque que si  $[H, O] = 0$ ,  $O(t) = O(0) \forall t$ . On retrouve ainsi un résultat bien connu avec le point de vue de Schrödinger.

Jusqu'à maintenant, nous étions habitués à adopter le point de vue de Schrödinger, c'est à dire à considérer que les fonctions d'onde dépendaient du temps. Maintenant que les fonctions d'onde sont devenues des opérateurs, il est naturel de continuer à les considérer comme dépendantes du temps, c'est à dire d'adopter le point de vue de Heisenberg.

### Qu'est devenu le groupe de Poincaré ?

La théorie relativiste des champs que nous avons développé précédemment est indispensable à l'élaboration de la théorie quantique des champs. En effet, nous connaissons maintenant l'essentiel, c'est à dire comment évoluent les opérateurs. Expliciter les calculs nous emmenerait trop loin, nous allons donc nous arrêter là dans la théorie quantique des champs.

On peut se demander où est passé le groupe de Poincaré, qui a été notre point de départ et l'objet central de notre étude. Quels sont ses espaces de représentation ? La réponse est immédiate : partout. En effet, si  $\mathcal{H}$  est un espace de représentation irréductible de  $\mathcal{P}$ ,  $\otimes^n \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^*$  et  $\mathcal{H}_F$  sont des espaces de représentation du groupe de Poincaré. Toutefois, ces représentations ne sont pas irréductibles. Notons  $(\rho, \mathcal{H}_F)$  la représentation de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{H}_F$  canoniquement issue de la représentation de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{H}$ .

Il est aussi naturel de s'intéresser à la représentation de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{End}(\mathcal{H}_F)$  : c'est dans cet espace que se trouvent les anciennes fonctions d'onde. Après une courte réflexion, l'action qu'il est naturel d'introduire est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P} \times \text{End}(\mathcal{H}_F) & \rightarrow \mathcal{H}_F \\ (g, u) & \mapsto g \cdot u = \rho(g) u \rho(g)^{-1} \end{array} \right.$$

Cette représentation correspond bien à ce que l'on pouvait attendre d'elle : si  $a_i$  détruit une particule d'état  $\phi_i$ ,  $g \cdot a_i$  détruit une particule d'état  $g \cdot \phi_i$ . Il en va de même pour  $a_i^\dagger$  et  $N_i$ .  $N$  est stable sous l'action de  $\mathcal{P}$ .

Soit  $u \in \text{End}(\mathcal{H}_F)$ , alors  $\text{Vect}(\mathcal{P} \cdot u)$  est un espace de représentation irréductible de  $\mathcal{P}$ . Les opérateurs sur  $\mathcal{H}_F$  fournissent donc une autre interprétation des représentations irréductibles du groupe de Poincaré pourraient permettre une réhabilitation des représentations qui avaient été éliminées pour "non physiques".

# Conclusion

Nous avons pris comme point de départ l'invariance de la physique par les transformations de Poincaré pour définir les particules élémentaires comme des représentations irréductibles de ce groupe. Nous avons ensuite utilisé la théorie des groupes pour déterminer les caractéristiques des particules et les équations régissant leur fonction d'onde. Après avoir étudié les cas classiques de théorie relativiste des champs, nous avons donné des premiers éléments pour quantifier cette théorie.

Un de nos postulats de départ a été l'invariance sous le groupe de Poincaré, c'est à dire sous des transformations de l'espace-temps. D'autres symétries peuvent être envisagées : les symétries internes. Une conséquence de l'existence de telles symétries est le fait que les particules deviennent plus riches, plus de grandeurs sont nécessaires à leur caractérisation, leur espace d'états est plus grand. Actuellement, le groupe de symétries internes attribué aux particules est  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ . Ces nouvelles symétries, impliquant une invariance de jauge, permettent de décrire les interactions électrofaible et forte et font apparaître de nouveaux quantas : les bosons d'interaction. Combinées à la théorie quantique des champs, elles sont à la base du modèle standard.

# Bibliographie

- [1] D. RENARD, *Groupes et représentations*, 2007
- [2] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, *Groupes et symétries*, 2006
- [3] A. ROUGÉ, *Introduction à la physique subatomique*, 2005
- [4] P. FAYET, *Introduction à la théorie relativiste des champs*, 2007
- [5] S. STERNBERG, *Group theory and physics*, 1994
- [6] J-P. DERENDINGER, *Théorie quantique des champs*, 2001
- [7] S. WEINBERG, *The quantum theory of fields*, 1995
- [8] S. SCHWEBER, *An introduction to relativistic quantum field theory*, 1962