Enseignement d'approfondissement de mathématiques
Relativité Générale

Théories de Kaluza-Klein

Vincent DÉMERY

Responsable de l'enseignement :
Jean-Pierre BOURGUIGNON

2008

Table des matières

Introduction

La relativité générale a de novateur sa modélisation géométrique de l'interaction gravitationnelle. En 1915, il semblait naturel de tenter de représenter de la même manière l'autre interaction connue, l'interaction électromagnétique. C'est ce qu'à fait Kaluza en 1921, en introduisant une dimension supplémentaire. Le champ électromagnétique est alors introduit, via son potentiel, comme la manière dont la dimension supplémentaire est « courbée » par rapport à l'espace-temps de base à quatre dimensions. En munissant le nouvel espace à cinq dimensions de la bonne métrique, les équations d'Einstein redonnent les équations d'Einstein pour l'espace de base et les équations de Maxwell.

Klein a ensuite émis l'idée que la cinquième dimension pouvait être prise compacte, compactification dont les conséquences apparaîtrons clairement. Dans ce cadre, nous introduirons le formalisme des fibrés qui nous permettra de traiter assez complètement les conséquences de ce modèle : équations des champs, équations des géodésiques, action. Enfin, nous montrerons brièvement comment ce modèle permet de quantifier la charge électromagnétique, et quelle doit être la taille de la dimension supplémentaire.

Pour finir, nous évoquerons les développements « récents » de cette théorie, concernant des tentatives de description des autres interactions : faible et forte. Nous passerons rapidement sur les calculs généralisant ceux que nous aurons fait pour l'électromagnétisme puis nous verrons quelles autres questions la description de ces interactions peut soulever.

1 Idée initiale de Kaluza

1.1 Construction de l'espace à cinq dimensions

Partons de l'espace-temps classique, une variété M de dimension 4 munie d'une métrique g.

L'idée de Kaluza consiste à introduire la variété $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ munie de la métrique :

$$\tilde{g} = p^* g + (\alpha + d\xi) \otimes (\alpha + d\xi)$$

où $p : \tilde{M} = M \times \mathbb{R} \to M$ est la première projection, α est une 1-forme sur la base M (plus précisément, $\alpha = p^*\beta$, avec β 1-forme sur la base) et $\xi : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ est la deuxième projection.

On peut ensuite chercher à écrire les équations de la relativité rénérale pour la variété $(\tilde{M}, \tilde{g})$, qui doivent redonner les équations de la relativité générale pour la variété M et les équations de l'électromagnétisme pour le potentiel α. Nous n'allons pas étudier ici toutes les équations en détails : nous le ferons plus tard, après avoir introduit le formalisme moderne. Nous nous bornerons ici à calculer l'équation des géodésiques dans l'espace total $\tilde{M}$.

1.2 Exemple de calcul : l'équation des géodésiques

Nous allons détailler ce calcul en composantes, comme l'avait fait Kaluza.

Les coordonnées utilisées seront $(x^i)_{0 \leq i \leq 4}$, $(x^\mu)_{0 \leq \mu \leq 3}$ étant les coordonnées sur la base et x^4 la coordonnée sur la dimension supplémentaire (les indices latins et grecs varieront respectivement de 0 à 4 et de 0 à 3). Nous devons avant tout donner les composantes de la métrique et de son inverse.

On note $\alpha = A_\mu dx^\mu$; cette notation n'est pas anodine : elle permet d'insister sur le fait que α représente le potentiel vecteur électromagnétique.

La métrique $\tilde{g}$ définie au paragraphe précédent et son inverse ont pour composantes :

$$\left(\tilde{g}_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu & \tilde{g}_{\mu 4} = A_\mu \\ \tilde{g}_{4\mu} = A_\nu & \tilde{g}_{44} = 1 \end{pmatrix} \text{ et } \left(\tilde{g}^{ij}\right) = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\nu & 1 + A_\rho A^\rho \end{pmatrix}$$

Il est important de remarquer que la métrique ainsi que ses composantes ne dépendent pas de la cinquième coordonnée x^4.

Donnons maintenant les symboles de Christoffel pour la métrique $\tilde{g}$. Leur expression fera apparaître le tenseur électromagnétique F et au autre tenseur, que nous noterons Σ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \text{ et } \Sigma_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu$$

Un calcul un peu lourd montre que les symboles de Christoffel s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^i_{44} = 0 \\
&\tilde{\Gamma}^4_{4\mu} = \tfrac{1}{2} A^\rho F_{\rho\mu} \\
&\tilde{\Gamma}^\nu_{4\mu} = \tfrac{1}{2} F_\mu{}^\nu \\
&\tilde{\Gamma}^4_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} - A_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} A^\rho (A_\mu F_{\nu\rho} + A\nu F_{\mu\rho}) \\
&\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}(A_\mu F_\nu{}^\lambda + A_\nu F_\mu{}^\lambda)
\end{aligned}$$

Venons-en à l'équation des géosiques : on considère une courbe géodésique dans $\tilde{M}$, paramétrée par s et on note u son vecteur vitesse. Le fait que cette courbe soit géodésique se traduit par l'équation :

$$\tilde{D}_u u = 0$$

où $\tilde{D}$ est la dérivation métrique associée à la métrique $\tilde{g}$. En composantes, cette équation s'écrit :

$$\frac{du^i}{ds} = -\tilde{\Gamma}^i_{jk} u^j u^k$$

Il ne reste plus qu'à expliciter cette équation. Pour les coordonnées dans la base, on trouve :

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = (u^4 + A_\rho u^\rho) F^\mu{}_\nu u^\nu$$

Le terme de droite de cette équation est exactement la forme électromagnétique à condition d'avoir $u^4 + A_\rho u^\rho = \frac{q}{m}$ où q est la charge de la particule et m sa masse. Un calcul rapide nous montre que cette quantité est conservée le long d'une géodésique :

$$\frac{d}{ds}(u^4 + A_\rho u^\rho) = 0 \text{ et on pose : } u^4 + A_\rho u^\rho = \frac{q}{m}$$

2 Modification de Klein, point de vue moderne

2.1 Compactification de la dimension supplémentaire et théorèmes généraux

2.1.1 Nouvel espace à cinq dimensions

La modification que Klein a apporté à l'idée de Kaluza est que la dimension supplémentaire pouvait être prise compacte. Nous allons donc prendre $\tilde{M} = M \times S^1$. Dans une plus grande généralité, on peut considérer que $\tilde{M}$ est une fibré de base M et de fibre S^1.

Nous donnerons plus loin quelques éléments de justification de cette compactification.

2.1.2 Action de S^1 et métrique sur $\tilde{M}$

Comme $\tilde{M}$ est un fibré de fibre S^1, il y a une action naturelle de S^1 sur $\tilde{M}$. On aura donc, si l'on part de l'espace total $\tilde{M}$, $M = \tilde{M}/S^1$. L'élément $1 \in \mathbb{R} = \mathfrak{s}^1$ définit par cette action un champ de vecteurs sur $\tilde{M}$ que nous appellerons V.

Nous noterons toujours g et $\tilde{g}$ les métriques sur M et $\tilde{M}$. Dans l'idée de Kaluza, la métrique est indépendante de la position le long de la cinquième dimension (il parle de *condition du cylindre*). Ici, cette condition se traduit par le fait que l'action de S^1 sur M est isométrique : soit $z \in S^1$ et φ_z le difféomorphisme de $\tilde{M}$ défini par l'action de S^1, on a :

$$\varphi_z^*(\tilde{g}) = \tilde{g}$$

D'un point de vue physique, il semble intéressant que les fibres, qui se projette sur des points de M, soient géodésiques. La proposition suivante en donne une condition nécessaire :

Proposition 2.1
Si S^1 agit sur $(\tilde{M}, \tilde{g})$ par isométries et que les orbites ont toutes la même longueur, elles sont géodésiques.

Preuve : le fait que l'action soit isométrique se traduit par $\mathcal{L}_V \tilde{g} = 0$ et la condition $\tilde{g}(V, V)$ est constant signifie que les fibres ont toutes la même longueur. On a, pour tout champ de vecteurs X, $0 = (\mathcal{L}_V \tilde{g})(X, V) = \tilde{g}(D_X V, V) + \tilde{g}(X, D_V V)$. Or $\tilde{g}(D_X V, V) = \frac{1}{2}\partial_X \tilde{g}(V, V) = 0$, donc $\tilde{g}(X, D_V V) = 0$, donc $D_V V = 0$: les orbites sont géodésiques. □

Dans la suite, nous supposerons que les fibres ont toutes la même longueur.

Nous allons maintenant voir comment l'action de S^1 sur $\tilde{M}$ permet de passer d'une métrique sur $\tilde{M}$ à une métrique g sur M.

On introduit la 1-forme $\tilde{\alpha}$ duale du champ de vecteurs V par la métrique $\tilde{g}$. $\tilde{\alpha}$ définit une *connection principale* sur le fibré principal $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ (car elle est S^1-invariante). De plus, avec cette connection, les espaces horizontal et vertical sont orthogonaux en tout point. Ceci nous place dans le cadre des *submersions riemanniennes*, ce qui nous sera utile par la suite. Il est alors aisé de déduire de ce qui précède une métrique sur la base telle que, en tout point, la restriction de dp au sous-espace horizontal soit isométrique. On introduit la métrique « horizontale »

$$g_H = \tilde{g} - \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}$$

Cette métrique ne mesure que la partie horizontale des vecteurs. De plus, elle est S^1-invariante ; elle peut donc s'écrire

$$g_H = p^* g$$

où g est une métrique sur M.

Dans l'autre sens, partant de la métrique g sur M, on obtient une métrique $\tilde{g}$ sur $\tilde{M}$ dès que l'on se donne une forme de connection $\tilde{\alpha}$, par $\tilde{g} = p^* g + \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}$.

D'après un théorème énoncé dans [1], ces deux constructions établissent une bijection.

2.2 Calcul de la courbure

Nous allons maintenant arriver au point central de la théorie de Kaluza-Klein : le calcul de la courburede Ricci de l'espace total. C'est elle qui est censée nous donner les équations d'Einstein pour la base et celles de Maxwell pour la forme de connection.

Pour cela, nous allons utiliser largement les outils développés dans [4], sans les démontrer.

2.2.1 Tenseurs fondamentaux

Toutes les formules données dans [4] utilisent les tenseurs T et A :

$$T_E F = \mathcal{H} D_{\mathcal{V}E}(\mathcal{V}F) - \mathcal{V} D_{\mathcal{V}E}(\mathcal{H}F) \text{ et } A_E F = \mathcal{V} D_{\mathcal{H}E}(\mathcal{H}F) - \mathcal{H} D_{\mathcal{H}E}(\mathcal{V}F)$$

où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ désignent respectivement les projections sur l'espace horizontal et vertical, la dérivation covariante étant celle sur l'espace total.

On a le résultat suivant :

Proposition 2.2
Si les fibres sont géodésiques, $T = 0$.

<u>Preuve</u> : l'hypothèse signifie que tous les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}^1$ définissent des champs de vecteurs géodésiques. Nous avons deux cas à étudier :
- si V et W sont verticaux, on peut avoir $0 = D_{V+W}(V+W) = D_V W + D_W V$. On a aussi $T_V W = T_W V$ (ceci vient du fait que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs commute avec la projection). On en déduit : $T_V W = \mathcal{H} D_V W = -\mathcal{H} D_W V = -T_W V = -T_V W$, donc $T_V W = 0$.
- si V est vertical et X horizontal, $T_V X = \mathcal{V} D_V X$, or pour W vertical, $\tilde{g}(D_V X, W) = \partial_V \tilde{g}(X, W) - \tilde{g}(X, D_V W)$. Ici, $\tilde{g}(X, W) = 0$ et $\tilde{g}(X, D_V W) = \tilde{g}(X, \mathcal{H} D_V W) = \tilde{g}(X, T_V W) = 0$. □

Ce qui est donné dans ce paragraphe ne se limite pas à notre cas d'une fibration principale par S^1 et vaut aussi dans le cadre général des submersions riemanniennes.

2.2.2 Calcul du tenseur de Ricci

Introduisons le tenseur $\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha}$. De plus, $\tilde{\omega}$ peut s'écrire $\tilde{\omega} = p^*\omega$, avec ω la 2-forme de courbure de la connection $\tilde{\alpha}$. Nous allons utiliser souvent le résultat suivant :

Proposition 2.3
Soit E, F deux champs de vecteurs et V le champ de vecteurs défini par l'action de S^1. On a :

$$\tilde{g}(D_E V, F) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(E, F)$$

<u>Preuve</u> : Séparons les cas F vertical et F horizontal :
- si F est vertical, on peut prendre $F = V$, alors $\tilde{g}(D_E V, V) = \frac{1}{2}\partial_E \tilde{g}(V, V) = 0$ car toutes les fibres sont de même longueur. On a bien $\tilde{g}(D_E V, F) = 0 = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(E, F)$
- si F est horizontal, $\tilde{g}(D_E V, F) = -\tilde{g}(V, D_E F) = -\tilde{\alpha}(D_E F)$. En utilisant la dérivée de Lie, on a $0 = \mathcal{L}_E(\tilde{\alpha}(F)) = (\mathcal{L}\tilde{\alpha})(F) + \tilde{\alpha}([E, F]) \stackrel{*}{=} \tilde{\omega}(E, F) + \tilde{\alpha}([E, F]) + \partial_F(\tilde{\alpha}(E))$ où l'on a utilisé pour $*$ $(\mathcal{L}_E\tilde{\alpha})(F) = \tilde{\omega}(E, F) + d(\tilde{\alpha}(E))F = \tilde{\omega}(E, F) + \partial_F(\tilde{\alpha}(E))$. Dans le membre de droite, les deux premiers termes sont antisymétriques donc, comme la somme est nulle, le troisième aussi et $\partial_F(\tilde{\alpha}(E)) = -\partial_E(\tilde{\alpha}(F)) = 0$ car F horizontal. On a donc $\tilde{\alpha}([E, F]) + \tilde{\omega}(E, F) = 0$.
  D'autre part, on a $(\mathcal{L}_V \tilde{g})(E, F) = 0 = \tilde{g}(D_E V, F) + \tilde{g}(E, D_F V) = -\tilde{\alpha}(D_E F) - \tilde{\alpha}(D_F E)$. Et finalement : $\tilde{g}(D_E V, F) = -\tilde{\alpha}(D_E F) = -\frac{1}{2}(\tilde{\alpha}(D_E F) - \tilde{\alpha}(D_F E)) = -\frac{1}{2}\tilde{\alpha}([E, F]) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(E, F)$. □

Nous allons utiliser les formules de [4] en prenant directement $T = 0$. Explicitons les composantes du tenseur A (F est quelconque, X et Y sont horizontaux) :

$$A_V F = 0, \ A_X V = D_X V \text{ et } A_X Y = \tilde{\alpha}(D_X Y)V$$

Dans les calculs, on séparera systématiquement les composantes horizontales et verticales.

Composante verticale – D'après [4] (les numéros des équations utilisées sont donnés entre accolades), $\tilde{g}(\tilde{R}_{V,V}V,V) = 0$ ({0}) et $\tilde{g}(\tilde{R}_{V,X}X,V) = -\tilde{g}(\tilde{R}_{X,V}X,V) = \tilde{g}((D_V A)_X X,V) + \tilde{g}(A_X V, A_X V)$ ({2}).

Calculons $\tilde{g}((D_V A)_X X,V) = \tilde{g}(D_V(A_X X),V) - \tilde{g}(A_{D_V X}X,V) - \tilde{g}(A_X(D_V X),V)$. Or $A_X X = 0$ ([4]). De plus, $\tilde{g}(A_{D_V X}X,V) + \tilde{g}(A_X(D_V X),V) = \tilde{g}(D_{\mathcal{H}D_V X}X,V) + \tilde{g}(D_X(\mathcal{H}(D_V X)),V) = -\tilde{g}(X, D_{\mathcal{H}D_V X}V) - \tilde{g}(\mathcal{H}D_V X, D_X V) = -\frac{1}{2}\tilde{\omega}(D_V X, X) - \frac{1}{2}\tilde{\omega}(X, D_V X) = 0$ car $\tilde{\omega}$ est antisymétrique.

Il reste donc le deuxième terme : $\tilde{g}(A_X V, A_X V) = \tilde{g}(D_X V, D_X V) = \sum_i \tilde{g}(D_X V, Y_i)^2 = \frac{1}{4}\sum_i(\tilde{\omega}(X,Y_i))^2$ où (Y_i) est une base orthonormée de l'espace horizontal.

Par définition, $\tilde{r}(V,V) = \sum_i \tilde{g}(\tilde{R}_{Z_i,V}V, Z_i)$ où (Z_i) est une base orthonormée de l'espace total. Alors $\tilde{r}(V,V) = \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\tilde{\omega}(Y_i,Y_j))^2 = \frac{1}{4}|\tilde{\omega}|^2 = \frac{1}{4}|\omega|^2$ (par définition, avec $\tilde{\omega}_{ij} = \tilde{\omega}(Y_i,Y_j)$).

Composante horizontale-verticale – D'après [4] ({1}), $\tilde{g}(\tilde{R}_{V,Y}V,V) = 0$. L'équation {3} donne $\tilde{g}(\tilde{R}_{X,Y}V,X) = -\tilde{g}(R_{X,Y}X,V) = \tilde{g}((D_X A)_X Y, V)$. Alors, $\tilde{g}((D_X A)_X Y,V) = \tilde{g}(D_X(A_X Y),V) - \tilde{g}(A_{D_X X}Y,V) - \tilde{g}(A_X(D_X Y),V)$.

Calculons les termes un par un : $\tilde{g}(D_X(A_X Y),V) = \partial_X(\tilde{g}(\mathcal{V}D_X Y,V)) - \tilde{g}(\mathcal{V}D_X Y, D_X V) = -\partial_X(\tilde{g}(Y, D_X V)) = -\frac{1}{2}\partial_X\tilde{\omega}(X,Y)$. Le deuxième vaut $-\tilde{g}(A_{D_X X}Y,V) = -\tilde{g}(D_{\mathcal{H}D_X X}Y,V) = \tilde{g}(Y, D_{\mathcal{H}D_X X}V) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(D_X X, Y)$. Enfin : $-\tilde{g}(A_X(D_X Y),V) = -\tilde{g}(D_X(\mathcal{H}D_X Y),V) = \tilde{g}(D_X Y, D_X V) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(X, D_X Y)$.

Il reste donc $\tilde{g}(\tilde{R}_{X,Y}V,X) = \frac{1}{2}(-\partial_X(\tilde{\omega}(X,Y)) + \tilde{\omega}(D_X X,Y) + \tilde{\omega}(X,D_X Y)) = -\frac{1}{2}(D_X\tilde{\omega})(X,Y)$.

Après contraction par rapport aux deux premiers indices, il reste la codifférentielle extérieure : $\tilde{r}(Y,V) = \frac{1}{2}\delta\tilde{\omega}(Y)$, donc après projection : $\tilde{r}(Y,V) = \frac{1}{2}\delta\omega(p_* Y)$.

Composante horizontale – D'après [4] ({2}), $\tilde{g}(\tilde{R}_{V,Y}Z,V) = -\tilde{g}(\tilde{R}_{Y,V}Z,V) = \tilde{g}((D_V A)_Y Z,V) + \tilde{g}(A_Y V, A_Z V)$. Le premier terme vaut $\tilde{g}((D_V A)_Y Z,V) = \tilde{g}(D_V(A_Y Z),V) - \tilde{g}(A_{D_V Y}Z,V) - \tilde{g}(A_Y(D_V Z),V) = \partial_V(\tilde{g}(D_Y Z,V)) - \tilde{g}(D_{\mathcal{H}D_V Y}Z,V) - \tilde{g}(D_Y(\mathcal{H}(D_V Z)),V) = -\frac{1}{2}\partial_V(\tilde{\omega}(Y,Z)) + \frac{1}{2}\tilde{\omega}(D_V Y,Z) + \frac{1}{2}\tilde{\omega}(Y,D_V Z) = -\frac{1}{2}(D_V\tilde{\omega})(Y,Z) = 0$ car $\tilde{\omega} = p^*\omega$. Pour le deuxième, $\tilde{g}(A_Y V, A_Z V) = \tilde{g}(D_Y V, D_Z V) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(Y, D_Z V)$. On a donc $\tilde{g}(\tilde{R}_{V,Y}Z,V) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(Y,D_Z V)$. Avec la base orthonormée X_i de l'espace horizontal, on a : $\tilde{g}(\tilde{R}_{V,Y}Z,V) = \frac{1}{2}\sum_i\tilde{\omega}(Y,X_i)\tilde{g}(X_i, D_Z V) = \frac{1}{4}\sum_i\tilde{\omega}(Y,X_i)\tilde{\omega}(Z,X_i)$.

Il faut ensuite évaluer, d'après l'équation {4} de [4], $\tilde{g}(\tilde{R}_{X,Y}Z,X) = \tilde{g}(R_{X,Y}Z,X) + 2\tilde{g}(A_X Y, A_Z X) - \tilde{g}(A_Y Z, A_X X) - \tilde{g}(A_Z X, A_Y X) = \tilde{g}(R_{X,Y}Z,X) + 3\tilde{g}(A_X Y, A_Z X)$ où R désigne le remonté du tenseur de Riemann sur la base. Alors $\tilde{g}(A_X Y, A_Z X) = \tilde{\alpha}(D_X Y)\tilde{\alpha}(D_Z X)\tilde{g}(V,V)$. En toute généralité, on peut prendre $\tilde{g}(V,V) = 1$, ce qui revient à choisir une norme sur l'algèbre de Lie de S^1. Alors, $\tilde{\alpha}(D_X Y)\tilde{\alpha}(D_Z X) = \tilde{g}(D_X Y,V)\tilde{g}(D_Z X,V) = \frac{1}{4}\tilde{\omega}(X,Y)\tilde{\omega}(Z,X)$.

En sommant les deux termes, on a : $\tilde{r}(Y,Z) = r(p_*Y, p_*Z) + \frac{1}{4}\sum_i(\tilde{\omega}(Y,X_i)\tilde{\omega}(Z,X_i) + 3\tilde{\omega}(X_i,Y)\tilde{\omega}(Z,X_i)) = r(p_*Y,p_*Z) + \frac{1}{2}\sum_i\tilde{\omega}(Y,X_i)\tilde{\omega}(X_i,Z)$. En composantes, on a : $\sum_i\tilde{\omega}(Y,X_i)\tilde{\omega}(X_i,Z) = \sum_i\tilde{\omega}_{ab}Y^a X_i^b\tilde{\omega}_{cd}X_i^c Z^d$. Or comme la base est orthonormée, dans le système de coordonnées adapté, $\sum_i X_i^b X_i^c = \tilde{g}^{bc}$. On obtient donc $\sum_i\tilde{\omega}(Y,X_i)\tilde{\omega}(X_i,Z) = \tilde{\omega}\circ\tilde{\omega}(Y,Z)$, où, en composantes, $(\tilde{\omega}\circ\tilde{\omega})_{ab} = \tilde{\omega}_{ac}g^{cd}\tilde{\omega}_{db}$.

Finalement : $\tilde{r}(Y,Z) = r(p_*Y,p_*Z) + \frac{1}{2}\tilde{\omega}\circ\tilde{\omega}(Y,Z) = r(p_*Y,p_*Z) + \frac{1}{2}\omega\circ\omega(p_*Y,p_*Z)$.

Résumé – Voici les formules que nous avons trouvé pour la courbure de Ricci $\tilde{r}$ de l'espace total. Y et Z sont des vecteurs horizontaux :

$$\begin{cases} \tilde{r}(V,V) &= \frac{1}{4}|\omega|^2 \\ \tilde{r}(Y,V) &= \frac{1}{2}\delta\omega(p_*Y) \\ \tilde{r}(Y,Z) &= r(p_*Y,p_*Z) + \frac{1}{2}\omega\circ\omega(p_*Y,p_*Z) \end{cases}$$

2.2.3 Courbure scalaire

Nous aurons besoin par la suite de la courbure scalaire, qui se déduit aisément de la courbure. D'après l'expression des différentes composantes du tenseur de Ricci, la courbure scalaire vaut $\tilde{s} = s + \frac{1}{2}(\omega\circ\omega)_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \frac{1}{4}|\omega|^2$.

Calculons $(\omega\circ\omega)_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \omega_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}\omega_{\sigma\nu}g^{\mu\nu} = \omega_{\mu\rho}\omega^{\rho\mu} = -|\omega|^2$ (pour retrouver la définition précédente de $|\omega|^2$, on utilise que la matrice de g dans une base orthonormée est l'identité).

On obtient donc :

$$\tilde{s} = s - \frac{1}{4}|\omega|^2$$

2.3 Nouvelles équations

2.3.1 Equations des champs

Ecriture des équations d'Einstein – Utilisons l'équation d'Einstein pour l'espace total, dans le vide, sans constante cosmologique : $r = 0$. Ecrivons la composante horizontale pour le tenseur d'Einstein $\tilde{G} = \tilde{r} - \frac{1}{2}\tilde{s}\tilde{g}$: $r + \frac{1}{2}\omega\circ\omega - \frac{1}{2}(s - \frac{1}{4}|\omega|^2)g = 0$. Pour le tenseur d'Einstein de la base G, cette équation s'écrit :

$$G = -\frac{1}{2}\omega\circ\omega - \frac{1}{8}|\omega|^2 g = \frac{1}{2}T_{\text{élec}}$$

où $T_{\text{élec}}$ est le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique. On retrouve donc, à un facteur de normalisation près, l'équation d'Einstein pour la base en présence d'un champ électromagnétique.

La composante horizontale-verticale donne

$$\delta\omega = 0$$

Cette équation est l'équation de Maxwell du vide (l'autre équation, $d\omega = 0$, est vérifiée par définition de ω).

La composante verticale est plus problématique : elle donne

$$|\omega|^2 = 0$$

Cette équation n'est pas la bienvenue : le champ électromagnétique n'est pas ne vérifie pas, en général, cette condition. Pour résoudre ce problème, deux possibilités se présentent :

– on peut considérer que la perturbation de la géométrie par la courbure ω est petite, et ainsi supposer que le terme $|\omega|^2$ est négligeable. Conconcrètement, cela revient à ne pas prendre en compte la composante horizontale de l'équation d'Einstein,

– il est aussi possible d'introduire une constante cosmologie Λ, ce qui modifie cette équation ; celle-ci reste tout de même difficile à interpréter.

Cette difficulté est un défaut majeur de cette théorie. Elle conduit à ne prendre les théories de Kaluza-Klein que comme des approximations de théories quantiques plus profondes.

Formulation variationnelle – Il est facile d'écrire la formulation variationnelle de l'équation d'Einstein sur l'espace total : l'action vaut

$$\tilde{S} = \int \tilde{s}\tilde{v}$$

où $\tilde{v}$ est l'élément de volume associé à la métrique $\tilde{g}$. Connaissant l'expression de $\tilde{s}$ et après intégration sur les fibres, de longueur l, on obtient que la quantité à rendre stationnaire est la suivante :

$$\tilde{S} = l \int \left(s - \frac{1}{4}|\omega|^2 \right) v$$

Cette expression de l'action correspond bien à celle que l'on a pour la gravité couplée à l'électromagnétisme : l'ensemble est bien cohérent. Cette action contient le *couplage minimal* entre la gravité et l'électromagnétiste, l'interaction étant contenue dans le terme $|\omega|^2$, où la métrique est présente implicitement.

Une condition nécessaire pour pouvoir intégrer sur les fibres est que celles-ci soient de longueur finie. La volonté de pouvoir ramener l'action à une intégrale sur la base conduit à exiger que la dimension supplémentaire soit compacte.

2.3.2 Géodésiques

Nous allons dans un premier temps montrer qu'une quantité (que nous appellerons la *charge*) est conservée, puis calculerons l'équation des géodésiques dans l'espace total projetée dans la base à partir de l'action.

Conservation de la charge – Considérons une géodésique c dans $\tilde{M}$. On a, d'après la proposition 2.3, $\partial_{c'}(\tilde{g}(V,c')) = \tilde{g}(D_{c'}V,c') = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(c',c') = 0$. La quantité $\tilde{g}(V,c') = \tilde{\alpha}(c')$ est conservée le long de la géodésique, c'est ce qu'on appelera la *charge* q_c de la géodésique c.

Equation projetée – Pour une courbe $c : [a,b] \to \tilde{M}$, l'action vaut : $S = \frac{1}{2}\int_a^b \tilde{g}(c'(z),c'(z))dz$. Nous noterons ici $\tilde{D}$ la dérivation métrique sur $(\tilde{M},\tilde{g})$ et D celle sur (M,g). Considérons une variation de la courbe c à extrémités fixes, paramétrée par $s : C : [a,b]\times] -\varepsilon, \varepsilon[\to \tilde{M}$. Nous notons $X(z) = \frac{\partial C}{\partial s}(z,0)$.

Nous allons reprendre le calcul de la variation de l'action fait dans [1] :

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{ds}|_{s=0} &= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\tilde{g}(c'(z),c'(z))dz \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left(g(p_*c'_s(z),p_*c'(z)) + \tilde{\alpha}(c'_s(z))\right)dz \\
&= \int_a^b g(D_{p_*X(z)}p_*c'(z),p_*c'(z)) + q_c\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\alpha}(c'_s(z)))dz
\end{aligned}$$

Calculons le deuxième terme apparaissant dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\alpha}(c'_s(z))) &= \frac{\partial}{\partial s}(\tilde{g}(c'_s(z)), V) \\
&= \tilde{g}(\tilde{D}_{X(z)}c'(z), V) + \tilde{g}(c'(z), \tilde{D}_{X(z)}V) \\
&= \tilde{g}(\tilde{D}_{c'(z)}X(z), V) + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}(X(z), c'(z)) \qquad \text{car } [X, c'_s] = 0 \\
&= \frac{d}{dz}(\tilde{g}(X(z), V)) - \tilde{g}(X(z), \tilde{D}_{c'(z)}V) + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}(X(z), c'(z)) \\
&= \frac{d}{dz}(\tilde{\alpha}(X(z))) + \tilde{\omega}(X(z), c'(z))
\end{aligned}$$

Revenons au calcul de l'action :

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{ds}|_{s=0} &= \int_a^b g(D_{p_*c'(z)}p_*X(z), p_*c'(z)) + q_c\tilde{\omega}(X(z), c'(z)) \\
&= \int_a^b -g(p_*X(z), D_{p_*c'(z)}p_*c'(z)) + q_c\tilde{\omega}(p_*X(z), p_*c'(z))
\end{aligned}$$

Pour que l'action soit stationnaire, il faut avoir pour tout champ X, $g(p_*X(z), D_{p_*c'(z)}p_*c'(z)) = q_c\tilde{\omega}(p_*X(z), p_*c'(z))$. Nous noterons $\gamma = p \circ c$, $\gamma' = p_*c'$. Explicitons un peu plus cette équation en l'écrivant en composantes, en utilisant directement qu'elle est vraie pour tout X : $g_{\mu\nu}(D_{\gamma'}\gamma')^\nu = q_c\omega_{\mu\nu}\gamma'^\nu$. Après avoir multiplié les deux membres par $g^{\lambda\mu}$, on obtient l'équation pour la projection γ de la géodésique :

$$(D_{\gamma'}\gamma')^\mu = q_c\omega^\mu{}_\nu\gamma'^\nu$$

On obtient bien l'équation du mouvement d'une particule de masse m et de charge $q = mq_c$ dans un champ électromagnétique.

2.4 Quantification de la charge

La quantification de la charge n'est pas une conséquence directe de ce que nous avons vu jusqu'ici. Elle est néanmoins intéressante car elle n'est pas prédite par un formalisme classique et elle permet, connaissant le quantum de charge, d'évaluer la taille de la dimension supplémentaire.

2.4.1 Quantification formelle

On se place ici dans un système de coordonnées adapté à la décomposition locale de $\tilde{M}$ comme $M \times S^1$.

Considérons une particule décrite par une fonction d'onde φ. La compacité de la cinquième dimension s'écrit, si celle-ci est de longueur l, $\varphi(x^4) = \varphi(x^4 + l)$. L'opérateur « translation de l selon la cinquième coordonnée » est donc l'identité : $e^{l\partial_4} = 1$. Formellement, on peut donc écrire $l\partial_4 = 2i\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Or d'après le principe de correspondance, $i\partial_4$ correspond à $p_4 = mu_4$. En prenant la normalisation $g_{44} = 1$ (pour que x^4 donne bien la longueur mesurée), on a donc $p_4 = q$ (dans le système de coordonnées choisi), où q est la charge de la particule. Finalement, on a :

$$q = \frac{n}{r_K}$$

où $r_K = \frac{l}{2\pi}$ est le *rayon de Klein*.

2.4.2 Evaluation du rayon de Klein

Il est long et fastidieux de donner le rayon de Klein avec ce que nous avons obtenu jusqu'à présent : il faut remettre toutes les constantes à leur place. Nous allons nous contenter de donner une estimation du rayon de Klein en oubliant les constantes sans dimension qui auraient pu apparaître le long du calcul. Pour cela, une analyse dimensionnelle suffit : à partir de $q = \frac{n}{r_K}$, donc $\frac{e}{3} = \frac{1}{r_K}$ (e est la charge de l'électron), on peut trouver quelles puissances de $\hbar$, c, μ_0 et G insérer dans la formule pour rendre celle-ci homogène. On trouve :

$$\frac{e}{3} \simeq \frac{1}{r_K}\frac{\hbar}{c^2}\sqrt{\frac{G}{\mu_0}}$$

L'application numérique donne une évaluation du rayon de Klein :

$$r_K \simeq 10^{-34}\text{m}$$

La petitesse de cette dimension supplémentaire est interprétée comme liée au fait que cette dimension, si elle existe, n'a toujours pas été observée.

Notons enfin que l'observation expérimentale de la conservation de la charge est un argument de plus en faveur de la compacité de la dimension supplémentaire.

3 Généralisation aux autres interactions

Nous avons donné une nouvelle formulation des lois fondamentales de l'électromagnétisme, en construisant une fibration de l'espace-temps de base M par S^1, le groupe de jauge des interactions électromagnétiques. Il semble alors naturel de tenter de généraliser cette construction pour décrire les autres interactions, dont le groupe de jauge est connu.

Certaines caractéristiques de notre construction vont rester inchangées (les autres groupes d'interactions sont aussi compacts), d'autres vont être modifiées (les nouveaux groupes ne seront plus abéliens, il ne seront plus de dimension 1). Nous allons présenter ici, sans démonstrations, quelques éléments de la généralisation de la théorie de Kaluza-Klein pour l'électromagnétisme.

3.1 Généralisation formelle

3.1.1 Nouveau cadre

Soit G le groupe de jauge de l'interaction que nous cherchons à décrire. On construit maintenant un fibré $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$, de groupe structural G. On munit l'espace total d'une métrique $\tilde{g}$ G-invariante et d'une forme de connection $\tilde{\alpha}$ également G-invariante (ici, $\tilde{\alpha}(\tilde{m} \in \tilde{M}) : T_{\tilde{m}}\tilde{M} \to \mathfrak{g}$). La 2-forme de courbure de cette connection sera ici Ω telle que $p^*\Omega = d\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}$.

Comme précédemment, on écrit la métrique $\tilde{g}$ sous la forme :

$$\tilde{g} = p^*g + \overline{g}$$

où $\overline{g}$ est une métrique G-invariante sur la fibre type.

3.1.2 Nouvelles équations

Les calculs ont été faits par Kerner et sont donnés, avec l'équation des géodésiques, en composantes dans [5]. Nous allons donner ici les résultats sous forme intrinsèque, tels qu'ils sont donnés dans [1] :

$$\begin{cases} \tilde{r}(U,V) &=& \overline{r}(U,V) + \sum_{i,j} \overline{g}(\Omega_{e_i,e_j}, U)\overline{g}(\Omega_{e_i,e_j}, V) \\ \tilde{r}(X,U) &=& \overline{g}((\delta\Omega)_{p_*X}, U) \\ \tilde{r}(X,Y) &=& r(p_*X, p_*Y) - 2\sum_i \overline{g}(\Omega_{p_*X,e_i}, \Omega_{p_*Y,e_i}) \end{cases}$$

où (e_i) est une base orthonormale de l'espace tangent à la base.

Les outils introduits par O'Neill sont bien sûr encore utilisables (et utilisés !) dans ce cadre.

On peut encore calculer la nouvelle action (cf. [1]), qui vaut :

$$\tilde{S} = v_F \int_M (s \circ p + \overline{s} - |\Omega|^2) v$$

après intégration sur les fibres, v_F étant le volume d'une fibre. Le terme $|\Omega|^2$ est le terme attendu pour la description d'une interaction de ce type.

3.2 Recherche de la fibre type

Sans nous aventurer dans les détails, il semble nécessaire, pour fixer complètement la théorie, de se donner la fibre type F. Cette recherche est présentée par Witten (cf. [6]) en prenant comme groupe de jauge celui donné par le modèle standard :

$$G = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$$

Il cherche alors une fibre de dimension minimale telle que l'action d'aucun élément ne soit triviale. Il trouve alors que la dimension minimale pour la fibre est 7, l'espace total est donc de dimension au moins 11. Cette dimension 11 est remarquable par le fait qu'elle est la dimension maximale, sous certaines conditions, pour écrire une supergravité valable. Nous ne nous étendrons pas plus sur ce sujet, qui dépasse de loin nos ambitions.

Conclusion

Nous avons vu que la relativité générale peut être encore plus générale que ce qu'en pensaient ses fondateurs : décrivant seulement la gravitation dans son cadre initial, elle peut aussi décrire, comme nous l'avons vu, l'électromagnétisme. Avec la relativité restreinte puis la relativité générale, notre conception de l'espace et du temps a considérablement changé : il est passé d'un cadre fixe et absolu à un objet physique dynamique.

Avec l'idée de Kaluza d'ajouter une dimension à cet espace-temps pour unifier deux interactions, notre conception a encore fait un bond en avant : l'espace-temps que nous connaissons pourrait n'être que la projection d'un espace de dimension supérieure, mais dans lequel les lois physiques sont plus simples. Au départ, la cinquième dimension n'était qu'un artéfact mathématique, mais l'idée de l'existence de dimensions cachées est au centre de la physique moderne.

Nous avons vu que ces dimensions supplémentaires pouvait laisser imaginer une unification avec d'autres interactions, mais les théories de Kaluza-Klein au sens strict se sont globalement révélées infructueuses (nous avons pu entrevoir un « défaut » dans celles-ci). Bien qu'elles soient aujourd'hui abandonnées, certaines des idées novatrices que ces théories ont introduites sont toujours d'actualité.

Références

[1] J.-P. BOURGUIGNON, *A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory*, 1989

[2] T. KALUZA, *On the unity problem of physics*, 1921

[3] O. KLEIN, *Quantum theory and five dimensional theory of relativity*, 1926

[4] B. O'NEILL, *The fundamental equations of a submersion*, 1966

[5] R. KERNER, *Generalization of the Kaluza-Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group*, 1968

[6] E. WITTEN, *Search for a realistic Kaluza-Klein theory*, 1981

[7] P. DA COSTA MOREIRA, *Quantification of electrical charges in Kaluza-Klein theory without strings of Dirac*, 2006